УДК 515.2

ВИБІР ОПТИМАЛЬНОГО ВАРІАНТУ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ МЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Боряченко О.В., студент,
Лесько О.М., студент,
Москаленко С.В., студент,
Гетьман О.Г., к.т.н., доцент,
Білицька Н.В., к.т.н., доцент.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
(Україна, м. Київ)

***Анотація** – розглядається можливість вибору найбільш раціональних методів розв'язку деяких метричних задач нарисної геометрії. Порівняння виконано на прикладі розв'язку однієї й тієї ж задачі класичним способом, із застосуванням способу заміни площин проекцій та способу обертання навколо лінії рівня.*

***Ключові слова** – лінії рівня, спосіб заміни площин проекцій, спосіб обертання навколо лінії рівня, метричні задачі, перпендикулярність.*

Постановка проблеми. В нарисній геометрії може існувати декілька варіантів розв'язку однієї й тієї ж задачі. Але для повної оптимізації алгоритму отримання результату не слід забувати і про методи перетворення проекцій, за допомогою яких теж є можливість скоротити процес розв'язку задачі. Тому у кожному конкретному випадку треба вибирати найкращий з них.

Аналіз останніх досліджень. Розв'язок деяких метричних задач нарисної геометрії інколи буває досить складним. Це стосується задач на перпендикулярність, на пошук ліній перетину площин, перетин прямої загального положення з площиною та інших. У таких випадках буває доцільним застосування методів, що спрощують хід побудов для отримання результатів розв'язку складних задач [1-3]. Це такі методи як перетворення комплексного креслення, метод косокутного проекціювання, методи проективної геометрії.

Постановка завдання. Для вибору оптимального варіанту розв'язку метричних задач студенти повинні мати досить широкий кругозір. Для цього інколи необхідно вивчення додаткових розділів дисципліни [4,5]. Поглиблене вивчення курсу нарисної геометрії розвиває їх інтелектуальний потенціал та надає їм можливість бути більш підготовленими до професійної конструкторської діяльності. Тому розгляд питання про вибір оптимального варіанта розв'язку конкретної задачі має неабияке значення.

Основна частина. Інколи виникають ситуації, коли розв’язок метричних задач буває дуже складним і потребує від студентів поглибленого знання багатьох розділів дисципліни. У деяких випадках застосування методів перетворення комплексного кресленика значно спрощує пошук результату.

У наведеному дослідженні аналізуються варіанти розв’язку задачі на визначення кута нахилу прямої до площини, причому і пряма, і площина займають загальне положення.

Таким чином, необхідно визначити кут між прямою ***l*** та площиною ***Σ(a // b)*** (рис.1а).

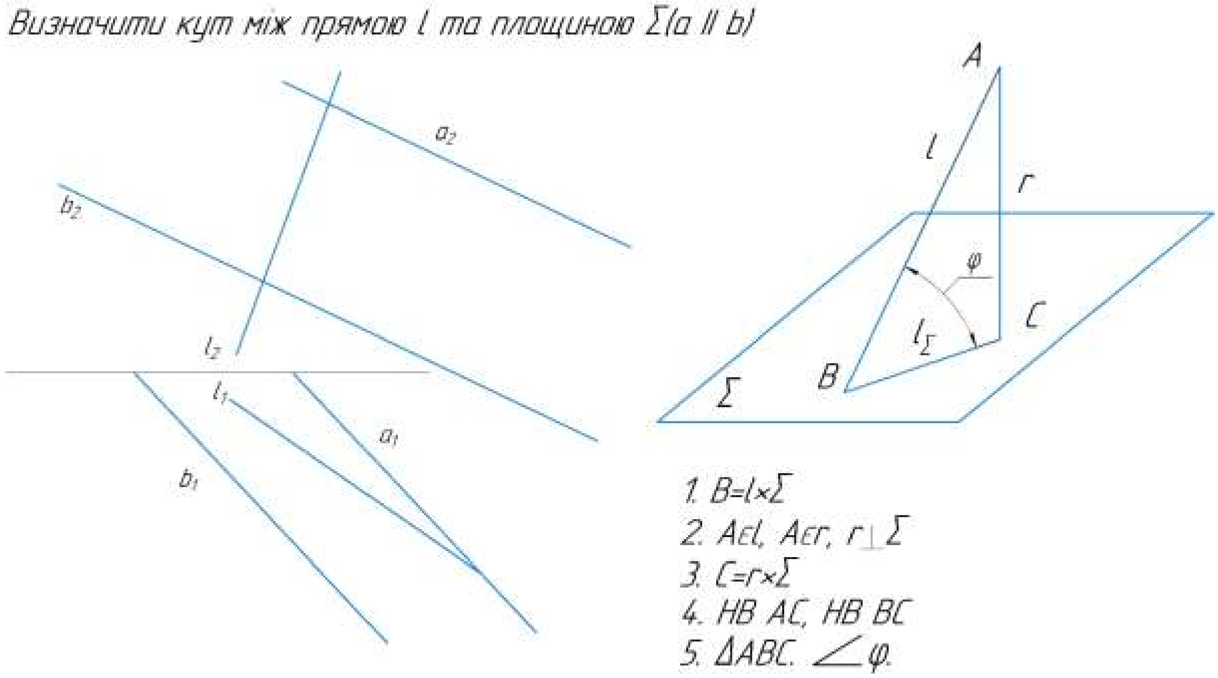

Рис. 1а. Умова та просторова модель метричної задачі.

Розглянемо просторову модель, що також наведена на рис.1а.

Для визначення кута між прямою та площиною необхідно, по-перше, знайти точку перетину цієї прямої із площиною (точку ***B***). Після чого із довільної точки ***A***, що інцидентна прямій ***l***, опускаємо перпендикуляр ***r*** на задану площину та знаходимо точку перетину цього перпендикуляра із заданою площиною. Ця точка на просторовій моделі позначена як точка ***C***.

З’єднавши точки ***A***, ***B***, та ***C***, отримуємо прямокутний трикутник, у якому шуканий кут ***φ*** між прямою ***l*** та площиною ***Σ(a // b)*** вимірюється між катетом ***BC*** та гіпотенузою ***AC***.

Наводимо розв’язок цієї задачі на комплексному кресленику.

На рис.1б знайдена точка перетину прямої ***l*** з площиною ***Σ(a // b).***

Для цього пряму ***l*** заключаємо у площину-посередник ***$\Delta(\Delta_2)$*** і знаходимо пряму ***12*** (***$1_2 2_2$, $1_1 2_1$***), за якою перетинаються площина-посередник ***$\Delta(\Delta_2)$*** із заданою площиною ***Σ(a // b).*** Пряма ***12*** (***$1_2 2_2$, $1_1 2_1$,***) перетинається із заданою прямою $\boldsymbol{l(l_2, l_1)}$ у точці $\boldsymbol{B(B_2, B_1)}$, яка і є шуканою точкою перетину прямої $\boldsymbol{l}$ та площини $\boldsymbol{\Sigma\ (a\ //\ b)}$.

Побудова перпендикуляра наведена на рис.1в.

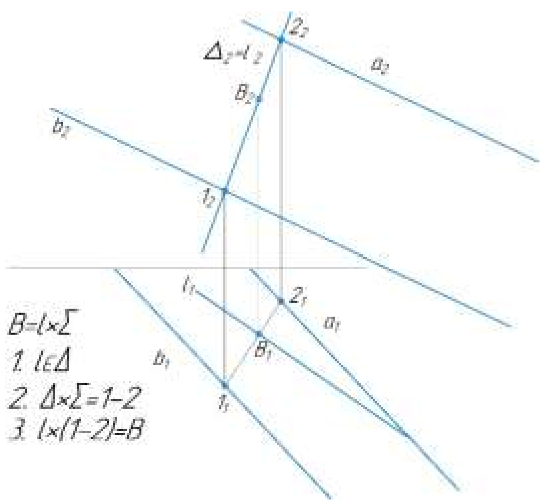

Рис. 1б. Побудова точки перетину прямої з площиною.

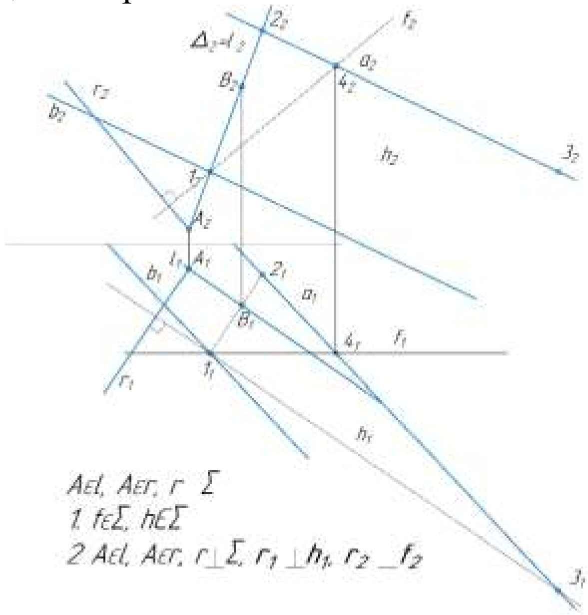

Рис. 1в. Побудова перпендикуляра до площини.

На прямій $\boldsymbol{l(l_1,l_2)}$ виберемо довільну точку $\boldsymbol{A(A_1,A_2)}$ і з неї проводимо перпендикуляр $\boldsymbol{r(r_1,r_2)}$ до заданої площини $\boldsymbol{\Sigma(a//b)}$. Фронтальна проекція $\boldsymbol{r_2}$ цього перпендикуляра буде розташована перпендикулярно фронтальній проекції $\boldsymbol{f_2}$ фронталі заданої площини, а горизонтальна проекція $\boldsymbol{r_1}$ – перпендикулярно горизонтальній проекції $\boldsymbol{h_1}$ горизонталі.

Визначаємо точку перетину перпендикуляра $\boldsymbol{r}$ із заданою площиною $\boldsymbol{\Sigma\ (a\ //\ b\ )}$. Для цього заключаємо пряму $\boldsymbol{r(r_2, r_1)}$ у площину-посередник $\boldsymbol{\Omega(\Omega_1)}$ і знаходимо її лінію перетину $\boldsymbol{56(5_26_2, 5_16_1)}$ із заданою площиною. Пряма $\boldsymbol{56(5_26_2, 5_16_1)}$ перетинається з перпендикуляром $\boldsymbol{r(r_2, r_1)}$ у точці $\boldsymbol{C(C_2, C_1)}$, яка і є основою перпендикуляра (рис.1г).

З'єднавши точки ***A,B,C*** на обох проекціях, отримаємо проекції прямокутного трикутника $\boldsymbol{ABC\ (A_2B_2C_2,\ A_1B_1C_1)}$ (рис.1д). Але для того, щоб визначити натуральну величину кута нахилу прямої до площини, необхідно отримати натуральні величини сторін трикутника ***ABC.*** Оскільки трикутник ***ABC*** прямокутний (рис.1а), то для його побудови без спотворення достатньо визначити натуральні величини сторін ***BC*** та ***AC***. Так, для визначення натуральної величини відрізка ***AC*** відкладемо від горизонтальної проекції $\boldsymbol{C_1}$ під прямим кутом до проекції $\boldsymbol{A_1C_1}$ різницю висот точок ***A*** і ***C*** та отримаємо точку $\boldsymbol{C_0}$, яку з'єднаємо з проекцією точки $\boldsymbol{A_1}$ (рис.1д). Відрізок $\boldsymbol{A_1C_0}$ (гіпотенуза отриманого прямокутного трикутника $\boldsymbol{A_1C_1C_0)}$ і є натуральною величиною відрізка ***AC***. За відомим алгоритмом знаходимо натуральну величину відрізка ***BC***.

Побудувавши прямокутний трикутник ***ABC*** за натуральними величинами двох катетів ***BC*** та ***AC*** (рис.1е), визначаємо кут нахилу ***φ*** прямої ***l*** до площини ***Σ(a//b)***. Він утворюється гіпотенузою ***AB*** і катетом ***AC*** (рис.1е).

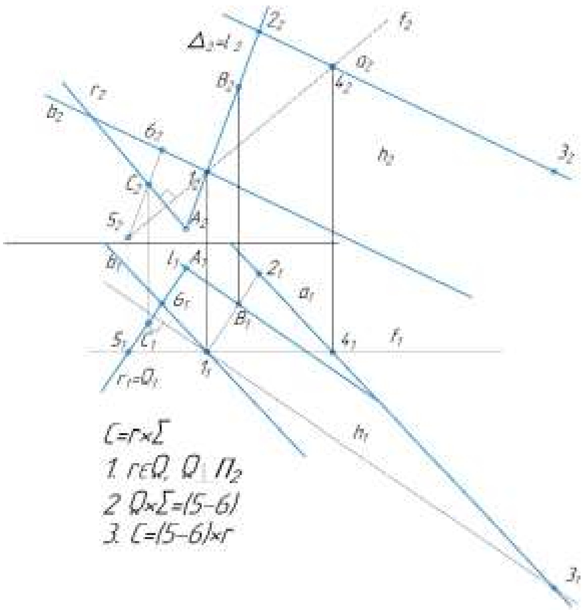

Рис. 1г. Побудова точки перетину перпендикуляра з площиною.

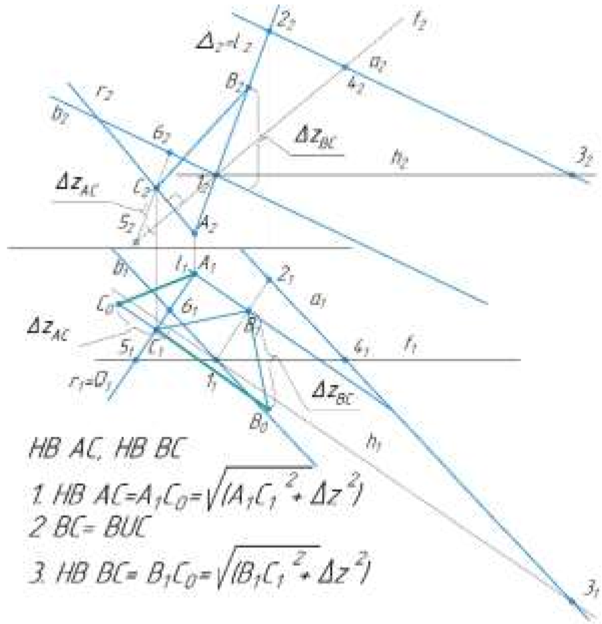

Рис. 1д. Побудова натуральних величин катетів.

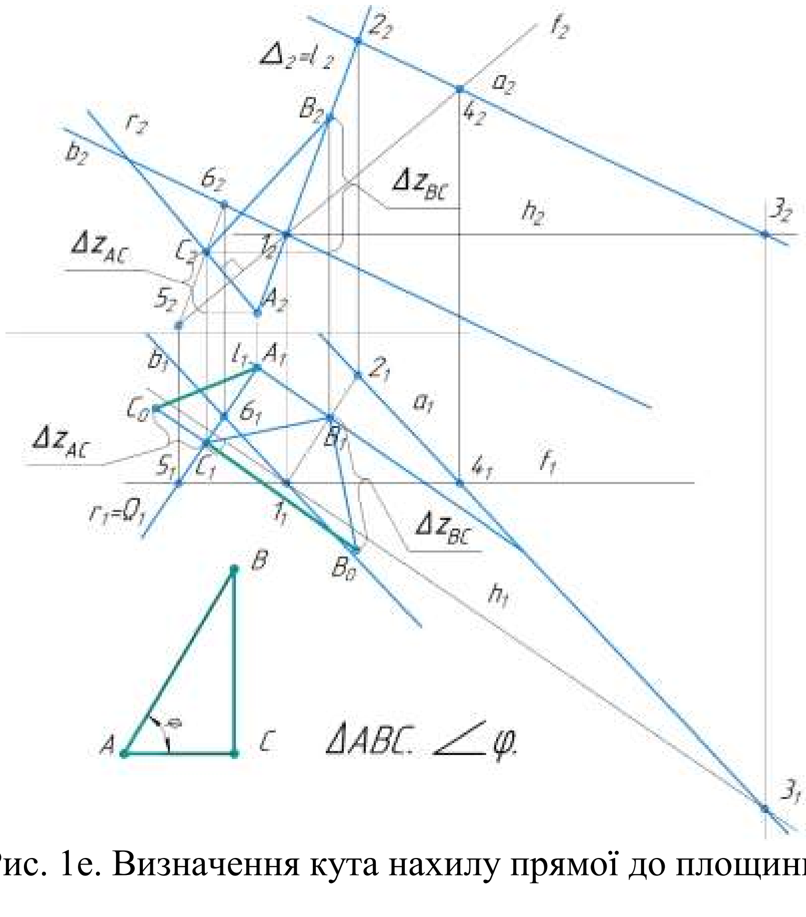

Рис. 1е. Визначення кута нахилу прямої до площини.

Але є й інші підходи для розв’язку цієї задачі. Розглянемо визначення кута нахилу прямої ***l*** до площини ***Σ(a//b)*** методом обертання навколо лінії рівня. Вказаним методом достатньо просто знайти натуральну величину кута нахилу прямої до заданої площини.

Візьмемо на прямій ***l*** довільну точку ***A*** та опустимо з неї перпендикуляр на задану площину (рис.2). Задана пряма та перпендикуляр утворюють кут ***ψ***, а кут ***φ*** буде визначеним як ***90°*** - ***ψ***.

Рис. 2. Алгоритм визначення кута нахилу прямої до площини за допомогою метода обертання.

Розглянемо, як виконується побудова кута ***ψ*** на комплексному кресленику (рис.3). Візьмемо довільну точку ***A*** ***(A_2, A_1)*** на прямій ***l(l_2, l_1).*** Фронтальна проекція ***r_2*** прямої, що перпендикулярна площині**,** буде розташована перпендикулярно фронтальній проекції ***f_2*** фронталі заданої площини, а горизонтальна проекція ***r_1*** - перпендикулярно горизонтальній проекції ***h_1*** горизонталі. Тому перш за все проводимо у заданій площині горизонталь ***h(h_2, h_1)*** та фронталь ***f(f_2, f_1).*** Це надасть можливість побудувати горизонтальну проекцію ***r_1*** та фронтальну проекцію ***r_2*** шуканого перпендикуляра ***r.***

Тепер повернемо площину загального положення ***Ω***(***r∩l***) навколо лінії рівня цієї площини до положення площини рівня, щоб визначити натуральну величину кута ***ψ.*** Тобто будемо обертати точку ***A*** навколо довільної горизонталі до суміщення із горизонтальною площиною.

Для цього у площині ***Ω***(***r∩l***) проводимо горизонталь ***h'*** та обертаємо точку ***A*** навколо цієї горизонталі. При своєму русі вона буде переміщуватися перпендикулярно ***h'*** в площині ***Δ($Δ_1$)*** і при суміщенні із горизонтальною площиною, що проходить через горизонталь ***h'***, радіус її обертання ***AO(A_2O_2, A_1O_1)*** повинен дорівнювати своїй натуральній величині. Визначаємо |***AO***| за правилом прямокутного трикутника, один катет якого – це горизонтальна проекція ***A_1O_1***, а другий – різниця висот точок ***A*** та ***O***. Гіпотенуза ***Rоб*** і є шуканою натуральною величиною радіуса обертання. Відкладаємо цю величину від горизонтальної проекції центра обертання ***O_1*** по направленню руху точки ***A_1*** вздовж сліду-проекції ***Δ ($Δ_1$).***

Таким чином, ми отримали горизонтальну проекцію повернутої точки A'_1. Горизонтальні проекції точок 4_1 та 5_1 при обертанні навколо горизонталі h' залишаються нерухомими. Тому трикутник $4_1 5_1 A'_1$ представлений в натуральну величину і кут ψ – це кут $4_1 A'_1 5_1$, а сам шуканий кут φ на рис. 3 показаний як додатковий до 90^o .

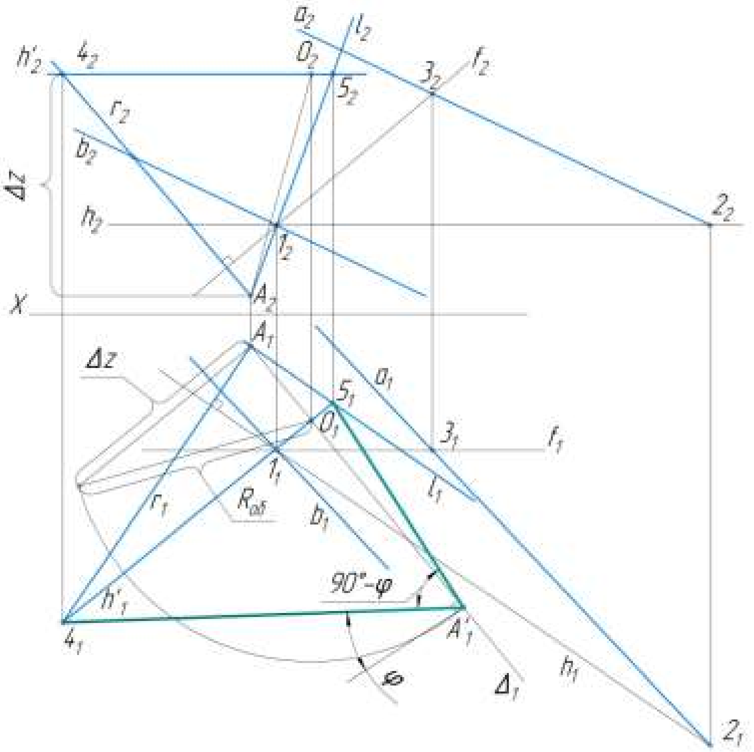

Рис. 3. Розв'язок задачі на комплексному креслинику.

На рис. 4 наведено розв'язок цієї ж задачі методом заміни площин проекцій.

Оскільки задана площина $\Sigma(a//b)$ – це площина загального положення, то для визначення кута нахилу прямої загального положення l застосуємо наступний алгоритм.

Спочатку перетворимо задану площину за допомогою довільної фронталі $f(f_2, f_1)$ у проекціюючу площину. $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$. Для цього нову площину проекцій Π_4 розташуємо перпендикулярно фронталі $f(f_2, f_1)$. Тобто у цій системі площин проекцій $x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ задана площина буде перетворена на проекціюючу $\Sigma(\Sigma_4)$, а пряма l , яка для зручності побудови задається також двома точками CD (C_2D_2, C_1D_1), залишається прямою загального положення. При цьому перетворенні ми не бачимо натуральну величину кута нахилу прямої до заданої площини.

Виконаємо перетворення площин проекцій $x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ таким чином, щоб площина $\Sigma(a // b)$ була представлена площиною рівня. Для цього нову площину проекцій Π_5 розташуємо паралельно $\Sigma(\Sigma_4)$. Але задана пряма l (CD (C_2D_2, C_1D_1)) при такому перетворенні і в цьому випадку буде прямою загального положення.

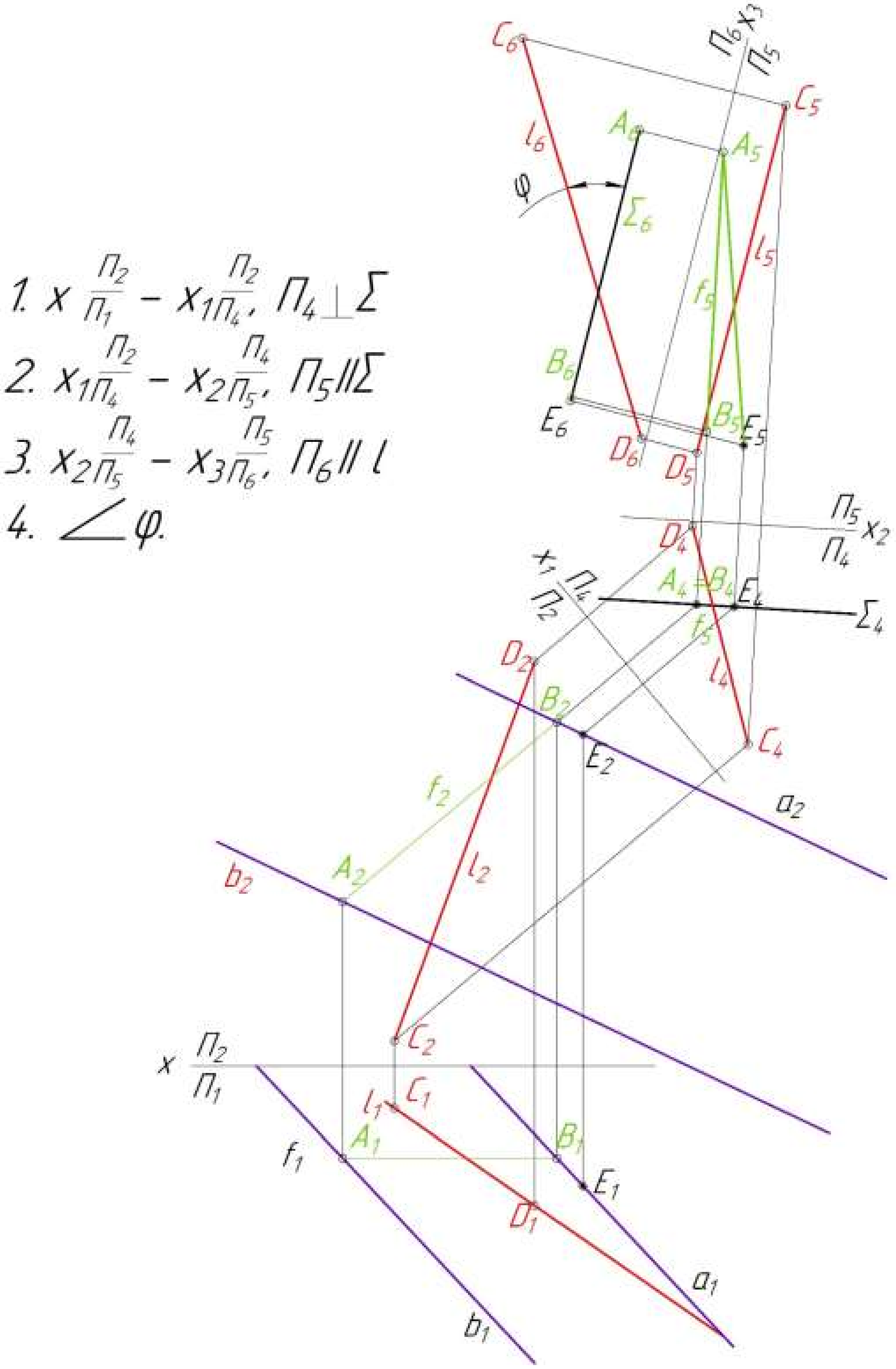

Рис. 4. Розв’язок задачі методом заміни площин проекцій.

І тільки після перетворення, яке дозволить пряму ***l*** побачити як пряму рівня, визначимо натуральну величину кута між цією прямою та заданою площиною ***Σ(a// b).*** Щоб досягти такого результату, зробимо заміну площин проекцій $x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5} \rightarrow x_3\frac{\Pi_5}{\Pi_6}$ так, щоб нова площина проекцій $\boldsymbol{\Pi_6}$ стала паралельною прямій ***l((CD*** ***(C₅D₅,*** ***C₆D₆)).*** Пряма у цій системі площин проекцій стала прямою рівня, а задана площина – площиною рівня. Тому на площині проекцій $\boldsymbol{\Pi_6}$ шуканий кут між заданими площиною ***Σ(a // b)*** та прямою ***l*** буде представлений в натуральну величину.

Порівняння наведених методів розв’язку задачі безперечно віддає перевагу методу обертання навколо лінії рівня. Він потребує найменш графічних побудов, займає найменше часу й надає найбільшу точність результату вирішення задачі.

Висновки. Для розв'язку розглянутої задачі були застосовані традиційний метод, метод обертання навколо лінії рівня та метод заміни площин проекцій. Використання цих методів та аналіз їх застосування розвиває просторово-логічне мислення студента. Поглиблене вивчення курсу нарисної геометрії розвиває інтелектуальний потенціал студента і надає їм можливість бути більш підготовленими до професійної конструкторської діяльності. Тому розгляд питання про вибір оптимального варіанта розв’язку конкретної задачі має неабияке значення і вирішується у кожному конкретному випадку з урахуванням низки вимог.

Такий підхід готує студентів до подальшої ефективної діяльності у професійної галузі.

Бібліографічний список

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия./ Бубенников А.В., Громов М.Я. – М: Высшая школа, 1973. – 286с.

2. Інженерна графіка. /Ванін В.В., Перевертун В.В., Надкернична Т.М., Власюк Г.Г. – К: Видавнича група BHV, 2009. – 399с.

3. Короткий курс лекцій з інженерної графіки для студентів немеханічних спеціальностей [Електронний ресурс]:. – Електронні текстові дані (1 файл : 72,1 Мбайт). / Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013.- 44 с.

4. Волочнюк М.В., Гетьман О.Г., Білицька Н.В. Оптимізація розв’язку деяких метричних задач нарисної геометрії. // Збірник доповідей IX-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн, об’єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених». – Випуск 9. 2020, стор. 84-88.

5. Демчук М., Юров М., Білицька Н.В., Гетьман О.Г. Застосування методів перетворення кресленика для визначення лінії перетину двох поверхонь. // Збірник доповідей X-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн, об’єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених». – Випуск 10. 2021, стор. 30-35