

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ПРО ВИМІРЮВАННЯ ВЕЛИЧИНИ КУТІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОЛОМ

Юрчук В.П., д. т. н., проф.,

Кузнєцов Ю. М., д. т. н., проф.,

Козловський А.Г. .

Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського"

(Україна, м. Київ)

***Ключові слова** – принцип узагальнення, коло, колесо, методика вимірювання, величина кута, центральний кут, дотична, хорда, кут в середині кола, кут поза колом.*

***Анотація** – у статті розглядується принцип узагальнення вимірювання величини кутів, пов'язаних з колом, який базується на розгляданні всіх схем вимірювання та наступному об'єднанні випадків. Цих схем наводиться 13, але користуючись теоремою, їх ще можна розглянути самостійно.*

Постановка проблеми. Узагальнення при розв'язуванні математичних (геометричних) задач міститься в переході від різних типів задач до більш загальних. Всі вчені вважають принцип «узагальнення» як найважливіший фактор розвитку математики, метод вирішення задач, яких об'єднує певна тематика. Така процедура дозволяє, при своєму використанні, значно спростити кількість геометричних схем розв'язку.

Формулювання цілей. Важливим методом є фактор «узагальнення», який дозволяє значно спростити методіку розв'язання всіх задач, особливо математичних. Для зменшення кількості схем вимірювання, особливо актуальним для свого використання є методи вимірювання величини кутів, пов'язаних з колом [1].

Основна частина. Найбільш поширеним представником кривих плоских ліній, які використовуються в техніці з давніх часів, є коло. Невід'ємною складовою, при використанні кола в геометричних дослідженнях, є геометрична методика вимірювання величини кутів, пов'язаних з колом, яке уособлює в собі колесо.

Навчальна література з геометрії розглядає вимірювання величини різних кутів, пов'язаних з колом, які демонструються на різних схемах, кількість яких більше десяти. При цьому, для визначення величини різних видів кутів необхідно рисувати різні схеми, різні розв'язки, методики і

побудови, що значно ускладнює використання самих методів визначення кутів.

Все це викладається у вигляді окремих теорем або задач на доведення. У дійсності це є різні випадки однієї й тієї ж узагальненої теореми про вимірювання кутів, пов'язаних з колом. Ця теорема, особливо важлива, оскільки геометрично охоплює всі випадки вимірювання кутів, пов'язаних з колом-колесом.

Значною перевагою даних досліджень є те, що визначення величини кутів, пов'язаних з колом, демонструється на одній схемі, яка дозволяє безпосередньо визначати величину наступних кутів на екрані монітора (виконуючи просту графічну побудову):

- центрального кута; - вписаного кута; - кута з вершиною всередині кола; - кута поза колом; - кута між дотичними до даного кола; - кута між паралельними прямими, які дотичні до кола; - кута між хордою і дотичною; - величини кутів, які спираються на одну хорду та багато інших випадків визначення величини кутів, як було сказано раніше, пов'язаних з колом.

Дані схеми теорем мають велике значення в техніці, оскільки вони пов'язані з колом, яке широко використовується при розв'язанні технічних задач [2].

Дана теорема має наступне визначення:

Теорема : Кут, сторони якого мають хоча б одну спільну точку з колом, дорівнює половині суми величин дуг, утворених хордами, на які він спирається, та розміщених всередині кола (чи на колі), або половині різниці величин дуг, утворених перетином січних чи дотичних поза колом.

Примітка: При цьому, коли одна із дуг кута належить колу, чи одна із хорд переходить в дотичну, яка проходить через точку дотику, то кут дорівнює половині дуги, обмеженої хордою.

Спочатку нагадаємо, що кути можна вимірювати в градусах та в радіанах. Дуги кола також можна вимірювати в градусах та в радіанах, що впливає із наступного визначення: **кутовою мірою, або кутовою величиною дуги кола, є величина центрального кута, який спирається на дану дугу.**

Показ взаємозв'язку, тобто фактор «узагальнення» цих випадків, добре ілюструється на схемі кутів, (яку було названо «**Чаша кутів**»), пов'язаних з колом, на якій вимірюються кути. При цьому, необхідно зауважити, що величина кутів вимірюється як дуга, обмежена двома хордами чи двома радіусами. А кут між хордою і дугою вимірюється як половина дуги, обмеженої хордою і дотичною, яка проходить через точку перетину хорди із заданим колом.

Також необхідно відмітити, що в нашому випадку хорди СВ та ВД виступають як сторони кута, величина якого визначається величиною дуг $\cup\text{СОД}$ (розгорнутий кут) і зменшується від 180° до значення 0° , (коли прями m та n паралельні між собою) - при переміщенні точки В зверху вниз, що показано на «Чаші кутів», (див. схему).

Для демонстрації запропонованої «Чаші кутів» розділимо коло на чотири рівних частини за допомогою двох перпендикулярних діаметрів АВ і CD. Відомо, що кожну із отриманих дуг називають півколом, тобто це дуги $\cup\text{АСВ}$ і $\cup\text{АДВ}$, які рівні між собою і дорівнюють по 180° .

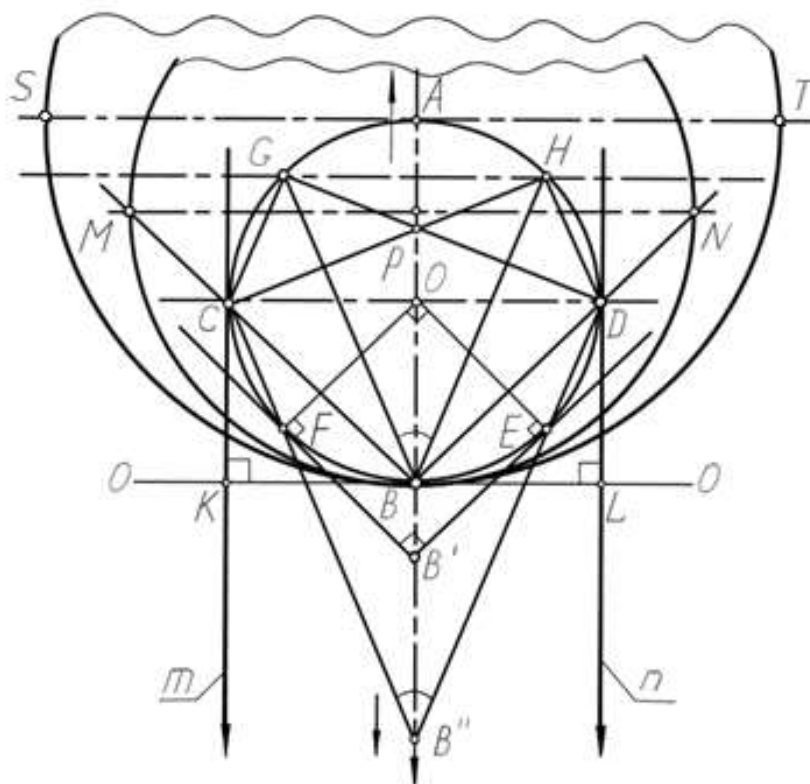


Рис.1 Схема до узагальненої теореми про вимірювання кутів, пов'язаних з колом («Чаша кутів»)

Після чого кожне із півкіл розіб'ємо ще на чотири частини по 45° кожна. При цьому все коло ділиться на 8 частин. А початком кожної з дуг, якими визначається величина кута, пов'язаного з колом, є точки даної дуги, спільні для кола і для однієї й тієї ж із двох прямих, що утворюють даний кут.

До речі, розбивку кола можна робити і на 12 рівних частин, тоді кожна ділянка кола буде дорівнювати 30° і буде виглядати менш наглядно та досить дрібно. Але, на наш погляд, достатньо коло розділити і на 8 частин по 45° кожна із них, що більш наглядно демонструє положення нашої теореми (див. схему).

Розглянемо більш детально основні твердження теореми, які показані як одна «узагальнена» схема вимірювання кутів:

Випадок 1. Центральний кут. Загальновідомо, що центральним кутом називається кут, вершина якого збігається з центром кола, а сторони є радіусами даного кола і він дорівнює величині дуги кола, на яку спирається [3].

Тоді маємо: $\angle FOE = \cup FBE = 90^\circ;$
(1)

Випадок 2. Вписаний кут. Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі. Величина його дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу кола [3].

Тобто: $\angle BGD = \angle BOD/2 = \cup BED = 90^\circ/2 = 45^\circ;$
(2)

Випадок 3. Вписаний кут, що спирається на півколо. Вписаний кут, що спирається на півколо, – прямий, і навпаки: будь-який кут, що дорівнює 90° - спирається на півколо. Оскільки градусна міра півкола дорівнює 180° , то маємо наступне значення величини кута $\angle CBD$:

$\angle CBD = \cup CAD / 2 = 180^\circ / 2 = 90^\circ;$
(3)

Даний вписаний кут аналогічно визначається для всіх величин кіл і дорівнює 90° , радіуси яких збільшуються вздовж осі АВ:
 $\angle CBD = \angle MBN = \angle SBT$, тобто Р-А і радіуси кіл збільшуються, а точка Р переміщується до точки А і далі.

Випадок 4. Розгорнутий кут. Вершина кута $\angle COD$ розміщена в центрі кола, і дорівнюють по півколу, а радіуси переростають в діаметр.

Тоді маємо: $\angle COD = (\cup CBD + \cup CAD) / 2 = (180^\circ + 180^\circ) / 2 = 180^\circ;$
(4)

Тобто, у даному випадку ми отримали розгорнутий кут – кут найбільшої величини, який дорівнює 180° і проходить через діаметр.

Випадок 5. Вписані кути, які спираються на одну дугу. Якщо вписані кути спираються на одну дугу, то вони між собою рівні.

$\angle BGD = \angle BCD = \cup BED / 2 = 90^\circ / 2 = 45^\circ;$
(5)

Випадок 6. Кут, вершина якого розміщена на перетині хорд. Кут, утворений перетином хорд, дорівнює половині суми дуг, які його утворюють. Так візьмемо хорди СН та DG, які перетинаються в точці Р.

Тоді маємо:
 $\angle CPD = \angle GPH = (\cup CBD + \cup GAH) / 2 = (180^\circ + 90^\circ) / 2 = 270^\circ / 2 = 135^\circ;$
(6)

Випадок 7. *Вписаний кут, утворений внутрішніми хордами, що перетинаються на колі. Даний кут також дорівнює половині суми дуг, оскільки в нашому випадку величина одного із наших кутів, вершина якого розміщена на колі, дорівнює 0° :*

$$\text{Тоді: } \angle CBD = (\cup CAD + 0^\circ) / 2 = (180^\circ + 0^\circ) / 2 = 90^\circ; \quad (7)$$

Випадок 8. *Вписаний кут, утворений перетином діаметра з хордою. Він дорівнює половині дуги, на яку спирається даний кут.*

$$\text{Звідси: } \angle CBA = \cup CGA / 2 = 90^\circ / 2 = 45^\circ; \quad (8)$$

Випадок 9. *Кут утворений перетином січних поза колом. Тепер розглянемо випадок з розміщенням кута, утвореного перетином січних поза колом. Нехай це буде $\angle CB'D$. Він має дорівнювати половині різниці величин дуг $\cup CAD$ та $\cup FBE$, тобто визначається наступною формулою:*

$$\angle CB'D = (\cup CAD - \cup FBE) / 2 = (180^\circ - 90^\circ) / 2 = 90^\circ / 2 = 45^\circ; \quad (9)$$

Випадок 10. *Кут між продовженням діаметра та січної. Тоді кут $\angle CB'A$ між продовженням діаметра AB і січної CF буде дорівнювати піврізниці їх дуг. Тобто величина даного кута дорівнює:*

$$\angle CB'A = (\cup CGA - \cup FB) / 2 = (90^\circ - 45^\circ) / 2 = 45^\circ / 2 = 22,5^\circ; \quad (10)$$

Випадок 11. *Кут між дотичною та хордою. При цьому хорда проходить через точку їх дотику. Тоді кут, утворений дотичною KBL та хордою CB , яка проходить через точку дотику B , дорівнює половині дуги, яка обмежена вказаною хордою та дотичною до кола.*

$$\text{Тобто: } \angle KBC = \cup CFB / 2 = 90^\circ / 2 = 45^\circ; \quad (11)$$

Відповідність даного твердження чітко видно на схемі кутів, що і перевіряється на довільних хордах, наприклад: BD , HB , SB та ін.

Випадок 12. *Кут утворений перетином дотичних поза колом. Такий кут дорівнює половині різниці дуг, утворених дотичними. Тоді кут $\angle FB'E$ визначається наступною формулою:*

$$\angle FB'E = (\cup FAE - \cup FBE) / 2 = (270^\circ - 90^\circ) / 2 = 180^\circ / 2 = 90^\circ; \quad (12)$$

Випадок 13. *Кут між дотичними до кола. Вершина кута B , який віддаляється від центра кола в нескінченність, і початковий вписаний кут $\angle CBD$ зменшується за наступною формулою:*

$$\angle CBD \rightarrow (\cup CAD - \cup CBD) / 2 = (180^\circ - 180^\circ) / 2 = 0^\circ;$$

(13)

Тобто, в даному випадку величина кута між прямими m та n , постійно зменшується і в кінцевому випадку, коли дані прямі в безкінечності, практично паралельні між собою, кут $\angle CBD$ дорівнює 0° .

ВИСНОВОК:

1. Наведена нами теорема («Чаша кутів»), як узагальнена теорема про вимірювання кутів, пов'язаних з колом, викладена методикою можливості вимірювання кутів на одній схемі екрана монітора, справедлива для всіх розмірів кола;
2. Теорема є досить актуальною, оскільки визначає величини кутів, пов'язаних з колом, яке з технічної точки зору, уособлює в собі колесо;
3. При графічному виконанні узагальненої теореми, можна вимірювати величини кутів також на екрані монітора;
4. Інші випадки вимірювання кутів, пов'язаних з колом - колесом, можна розглянути самостійно, моделюючи їх та використовуючи на даній схемі - «Чаші кутів», [4 - 6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Апостолова, Галина, Ясинський, Василь. Геометрія старшокласникам і абітурієнтам. – К.: Фактор, 2008. – 88 с.: іл.
2. Нарисна геометрія: Підручник / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстїфєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко; За редакцією В. Є. Михайленка. – 2-ге вид. переробл. – К.: Вища шк. 2004.- 303 с.: іл.
3. Роганін О. М. Геометрія. 7-11 класи / О. М. Роганін. – Х.: ПП Українське літературне агенство «УЛА», 2019.- 32 с. – (Довідник у таблицях).
4. Ковальов Ю. М., Матющенко Н. В., Шевель Л. В. Інженерна графіка. Виконання архітектурно-будівельних креслень у графічному середовищі ArchiCAD. Навчальний посібник. – К.: НАУ, 2010. 186 с.
5. Ковальов Ю.М. Прикладна геометрія: Підручн. Для студ. вищих навч. закладів. / Ю.М. Ковальов, В.М. Верещага. – К. : ДІЯ, 2012. – 472 с. : іл. -Бібліогр. : с. 1.
6. На дану теорему у 2020 р. отримано «Авторське право на науковий твір»: / Науковий твір «Узагальнена теорема про вимірювання кутів, пов'язаних з колом» («Чаша кутів») / В. П. Юрчук // Свідоцтво Мінекономрозвитку України про внесення до Державного реєстру авторського права на твір та видачу свідоцтва № 96574 від 10.03.2020 р., «Бюлетень №58».