УДК 514.181

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МНОГОГРАННИКІВ ЗА ОБРИСОВИМИ ПРОЕКЦІЯМИ

Путятін Р.О., студент,
Юрчук В.П., д.т.н., проф,
Гагарін О.О., к.т.н., доц.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний університет ім. Ігоря Сікорського»
(Україна, м. Київ)

Анотація - *Обрисовою називається проекція многогранника на епюрі, якщо вона є набором простих многокутників, оригіналами яких є видимі ребра, (тобто многокутники зображені основною лінією), які на проекції не перетинаються.*

Ключові слова: *нарисна геометрія, площини проекцій, многогранник, обрисова проекція, грань, ребро, точка, метод ортогонального проекціювання, горизонтальна площина проекцій, призма.*

Постановка проблеми. Неоднозначна нарисна геометрія є новим напрямом, який потребує послідовного розгляду задач, починаючи з тих, які можна вважати елементарними. Такими є задачі, пов'язані з многогранниками. Проекція тіла на епюрі називається обрисовою, якщо вона містить лише обриси. Обрисова проекція многогранника містить лише прості многокутники - замкнені ламані без самоперетинів, тобто які не перетинаються між собою [1;2].

Якщо проекцією многогранника є обрисова принаймні на одній із площин, то це накладає значні обмеження на кількість його граней, ребер і вершин, і такі тіла є достатньо простими для аналізу. Перш ніж досліджувати властивості їхніх проекцій, потрібно визначити клас таких многогранників та дослідити їхні властивості [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В [3] було почато дослідження в області неоднозначної нарисної геометрії: введено деяку термінологію, наведено приклади неоднозначностей та способи їхнього розв'язання. Поняття, близьке до обрисової проекції, використано в [4] та [5]. В цих роботах було досліджене перетворення тривимірних многокутників (ребра яких не лежать в одній площині) на плоскі опуклі многокутники.

В [6] було досліджено наявність та алгоритми пошуку особливих проекцій просторових ламаних, дерев - графів, вузлів. Об'єктами є проекції без самоперетину із мінімальною кількістю самоперетинів та з найменшою можливою кількістю точок, які є образами кількох вершин або внутрішніх точок кількох ланок. Загалом проекції досліджено з точки зору придатності для відновлення структури зображеного об'єкта, що в загальному випадку є просторовою ламаною лінією

Формулювання цілей статті. Метою статті є визначення множини (тривимірних) многогранників, що мають прості проекції на одній із площин проекцій - вважаємо, що в даному випадку це буде вигляд зверху, тобто горизонтальна площина проекцій.

Основна частина. Простота проекції означає, що обрис не містить «внутрішніх ребер», які мають із ним спільні точки. На рис. 1 проекція на П1 є простою, інші проекції – ні.

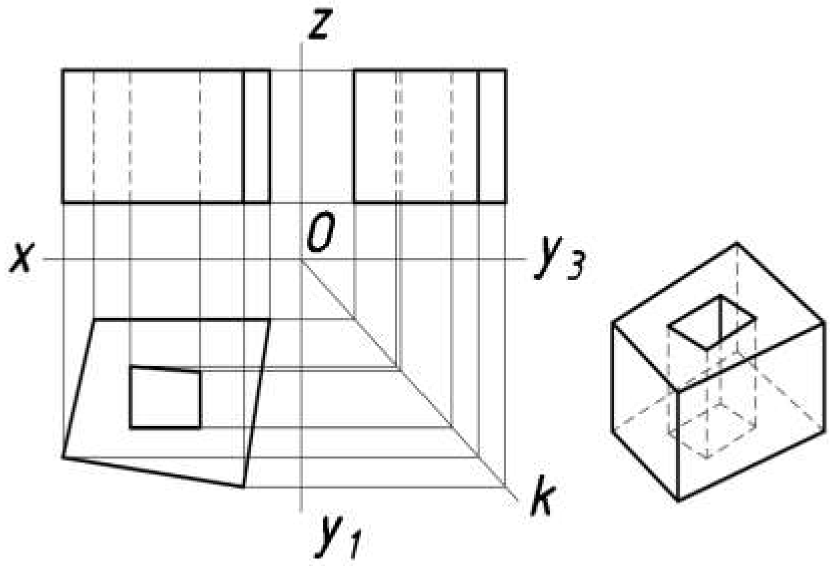

Рис. 1. Схема до визначення поняття обрисової проекції

Якщо на П1 є кілька многогранників, то очевидно, що необхідною умовою належності множині оригіналів зв'язного многогранника є наявність многокутника, який містить всередині своєї внутрішньої області всі інші многокутники. Цей многокутник називатимемо зовнішнім, інші – внітрішніми. При цьому основою є грань многокутника, і вона не перпендикулярна до площини П1.

Тоді, якщо взяти многогранник P, проекція P_1 якого на П1 є обрисовою, то P можна представити як результат булевого додавання й віднімання скінченної кількості призм, бічні грани яких перпендикулярні до П1.

Використовуючи P_1 як основу, побудуємо на ній пряму нескінченну призму Q і розглянемо дві січні площини, які не є горизонтально-проекціювальними. Вони відтинають від Q деякий обмежений многогранник R. Якщо лінія перетину не перетинає Q, тоді R – це призма, і $R_1 \equiv P_1$. Кілька таких призм можуть перетинатися лише у вершині чи вздовж ребра (інакше проекція R_1 не буде обрисовою), але такі многогранники ми не розглядаємо [7].

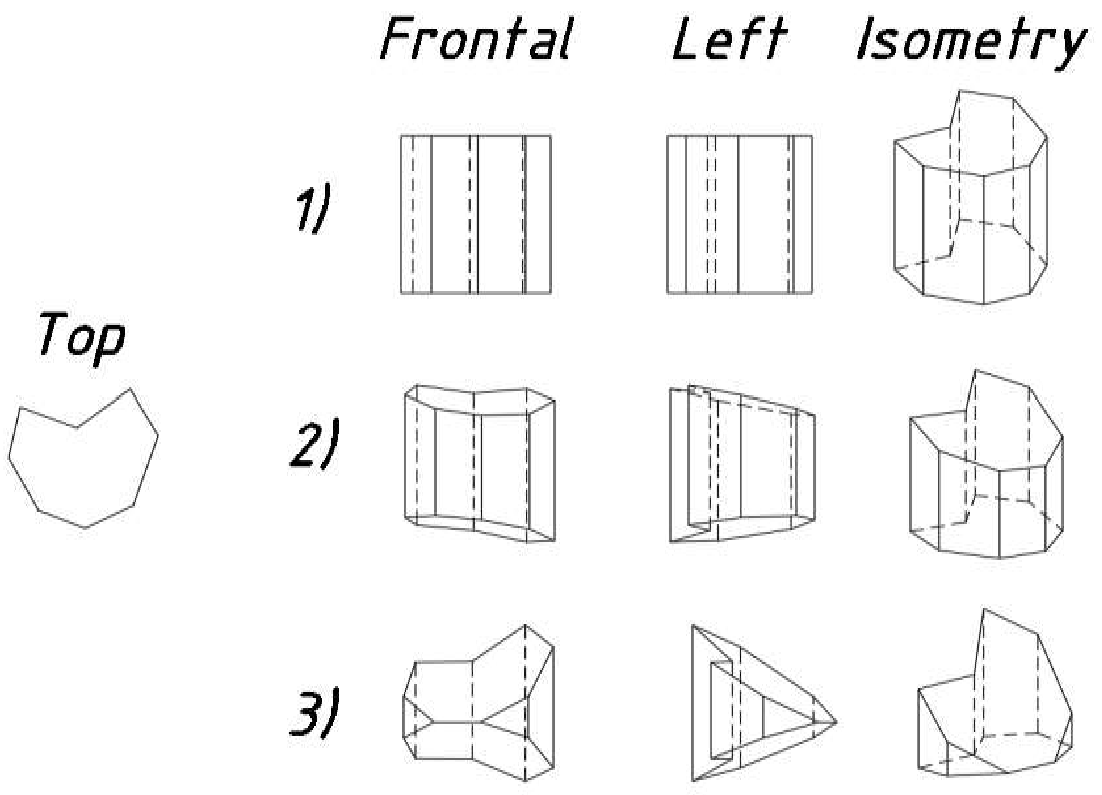

Рис. 2. 1) Пряма призма; 2) зрізана призма;
3) призма з виродженою гранню

Зовнішній многогранник є проекцією вже описаної зрізаної призми (або кількох призм). Такі призми називатимемо зовнішніми, а внутрішні многокутники можуть бути проекціями:

- заглиблень або отворів у зовнішній призмі, отриманих за допомогою булевого віднімання поверхонь геометричних тіл (мають знак «-»);
- малих призм, отриманих за допомогою булевого додавання тіл (мають знак «+»).

Малі призми називатимемо внутрішніми. Аналогічно до першого випадку, основи зовнішніх і внутрішніх призм можуть мати спільну вершину чи спільне ребро.

В той же час, жодна пара основ не може мати лінію перетину, що належить самій основі. Це означає, що внутрішня призма, незалежно від її знаку, не може мати основу, лише частково «занурену» в зовнішню призму, інакше це призвело б до появи небажаних ребер на проекції горизонтальній.

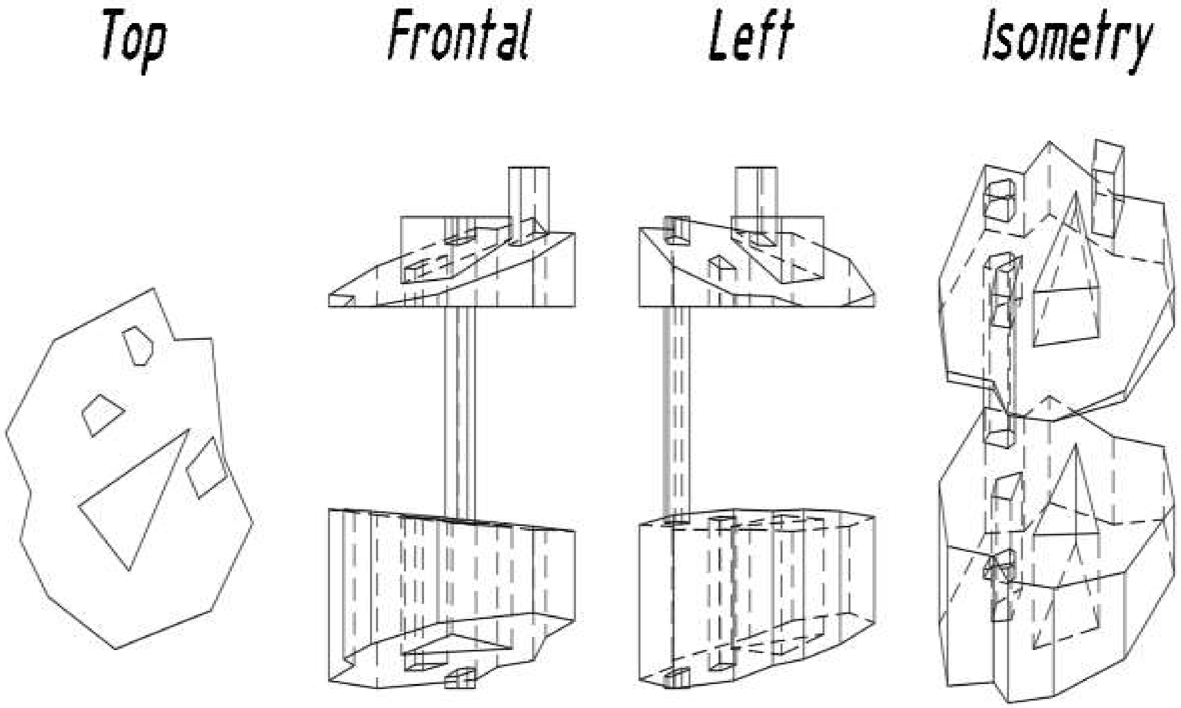

Рис. 3. Геометричні моделі поверхонь до прикладу

На рис. 3 зображено тіло, що складається з двох зовнішніх призм, трьох внутрішніх призм зі знаком «+» і двох зі знаком «-».

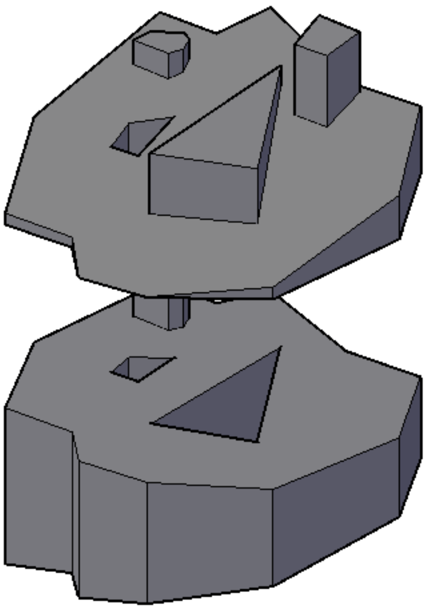

Рис. 4. Аксонометричне зображення кінцевої призматичної поверхні

В результаті побудови ми отримуємо поверхню як геометричну комбінацію призматичних поверхонь, кожна з яких може відповідати певним функціональним показникам шуканого тіла.

ВИСНОВКИ

1. Геометрично поверхні внутрішньої призми можуть з'єднувати зовнішні призми між собою, утворюючи таким чином «багатошаровий» зв'язний многогранник (рис. 3);
2. Геометричну модель многогранника *P* можна отримати за допомогою додавання та віднімання скінченної кількості призм з використанням булевих операцій;
3. В загальному випадку многогранник можна отримати за рахунок обрисової проекції на одну площину та подальшим проектуванням його заданих властивостей.

Бібліографічний список

1. Polygon – New World Encyclopedia: website. URL: https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Polygon (Last accessed: 08.02.2022)
2. Simple Polygon -- From Wolfram MathWorld: website. URL: https://mathworld.wolfram.com/SimplePolygon.html (Last accessed: 08.02.2022)
3. R.O. Putiatin. A brief look on the ambiguous descriptive geometry / Матеріали X-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих учених «Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених» // Путятін Р.О., Юрчук В.П. Випуск 10. – 94 с., іл.
4. Jorge Alberto Calvo, Danny Krizanc, Pat Morin. Michael Soss, Godfried Toussaint. Convexifying polygons with simple projections. *Information Processing Letters*. 2001. Vol. 80, Issue 2, P. 81-86. DOI: 10.1016/S0020-0190(01)00150-8
5. T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, S. Lazard, A. Lubiw, J. O'Rourke, M. Overmars, S. Robbinsk, I. Streinu, G. Toussaint, S. Whitesides. Locked and Unlocked Polygonal Chains in 3D. *Discrete & Computational Geometry*. 2008. Vol. 26, Issue 3, URL: https://arxiv.org/abs/cs/9910009 (Last accesssed 08.02.2022)
6. Prosenjit Bose, Francisco Gómez, Pedro Ramos, Godfried Toussaint. Drawing Nice Projections of Objects in Space. *Journal of Visual Communication and Image Representation*. Vol. 10, Issue 2, P. 155-172. DOI: 10.1006/jvci.1999.0415
7. Tree – Encyclopedia of Mathematics: website. URL: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Tree (Last accessed 08.02.2022)