

## ТРАНСПОРТУВАННЯ ЧАСТИНКИ РУХОМОЮ ХВИЛЯСТОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Воліна Т.М., к.т.н., доцент

*Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна), Сумський національний аграрний університет (м. Суми, Україна)*

***Анотація** – у статті досліджуються закономірності руху матеріальних частинок по хвилястій поверхні з поперечним перерізом у вигляді синусоїди під час її колових поступальних коливань в горизонтальних площинах. Складено диференціальні рівняння відносного переміщення частинки, які розв’язано чисельними методами. Побудовано траєкторії ковзання частинки по поверхні та графіки її реакції. Частковим випадком поверхні є площина, а траєкторією ковзання частинки є коло. Знайдено аналітичний вираз для визначення його радіуса. При колових коливаннях хвилястої лінійчатої поверхні з поперечним перерізом у вигляді синусоїди відносною траєкторією частинки після стабілізації руху може бути замкнена або періодична просторові криві. Для уникнення відриву частинки від поверхні потрібно задавати режим коливань, який враховує форму поверхні та кінематичні параметри коливань. При діаметрі кола, яке описують усі точки поверхні при її коливанні, рівному періоду синусоїди, траєкторією відносного руху частинки може бути періодична крива. У цьому випадку частинка рухається в напрямі, близькому до поперечного, долаючи впадини і гребні поверхні. У інших випадках траєкторією є замкнена просторова крива, горизонтальна проекція якої близька до кола. Знайдені аналітичні залежності дозволяють визначати вплив конструктивних та технологічних параметрів поверхні на траєкторію руху частинки по ній.*

***Ключові слова** – частинка, хвиляста поверхня, колові коливання, диференціальні рівняння, кінематичні параметри.*

**Постановка проблеми.** Шорстка площина є універсальним конструктивним елементом багатьох машин і пристроїв для просіювання і сепарації частин технологічного матеріалу. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або круговий рух [1]. Хвиляста поверхня із поперечним перерізом у вигляді синусоїди в ролі робочої поверхні суттєво змінюватиме траєкторії ковзання частинок. Відповідно зміниться і математичний опис такого руху. Ковзання частинки по площині буде частковим випадком ковзання по хвилястій поверхні, коли амплітуда

синусоїди дорівнюватиме нулю. При коливаннях хвилястої поверхні, коли всі її точки описують кола, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється.

**Аналіз останніх досліджень.** Рух матеріальних частинок по поверхнях розглядається у наукових статтях у контексті їхньої природи: це можуть бути механічні частинки, частинки газу чи рідини, частинки у потоці тощо. Звісно, рух окремої частинки не може бути ідентифіковано з рухом тіла або технологічного матеріалу, який складається з окремих частинок та під час дослідження руху якого мають бути враховані сили інерції, що виникають під час обертання тіла. У деяких випадках при незначних кутових швидкостях ці сили можуть бути проігноровані, як, наприклад, при дослідженні руху частинки по зовнішній поверхні циліндра, що здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах [2]. Проте, на основі руху окремої частинки можливо ідентифікувати залежності, що можуть бути застосовані до тіла або до технологічного матеріалу чи допомагають визначити напрям подальших досліджень. Так, науковцями розглянуто рух матеріальних частинок по рухомим спіральним робочим органам [3]; по гвинтовій поверхні [4]; по гравітаційному спуску, утвореному поверхнею косоного закритого гелікоїда [5]; по сферичному сегменту, який обертається навколо вертикальної осі [6]; переміщення частинки в неактивній зоні між шарнірними гвинтовими секціями гнучкого гвинтового конвеєра [7]. Отже, для вивчення руху частинки в залежності від конструктивних параметрів поверхні необхідно мати аналітичні залежності, що описують такий рух.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є дослідження закономірностей руху матеріальних частинок по хвилястій поверхні, яка здійснює колові поступальні коливання в горизонтальних площинах. Хвилястою поверхнею є циліндрична поверхня із горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних і поперечним перерізом у вигляді синусоїди.

**Основна частина.** Параметричні рівняння циліндричної поверхні, у якої поперечним перерізом є синусоїда, а прямолінійні твірні паралельні осі  $OX$ , запишуться:

$$X=u; \quad Y=v; \quad Z=c\sin av, \quad (1)$$

де  $c$  – амплітуда,  $a$  – частота (сталі величини);

$u, v$  – незалежні змінні поверхні, де  $u$  – довжина прямолінійної твірної,  $v$  – відстань вздовж осі  $OY$ .

Циліндрична хвиляста поверхня здійснює поступальні коливання таким чином, що всі її точки описують кола (на рис. 1 показані траєкторії переміщення чотирьох точок поверхні). Абсолютний рух частинки будемо розглядати по відношенню до нерухомої системи координат  $OXYZ$ .

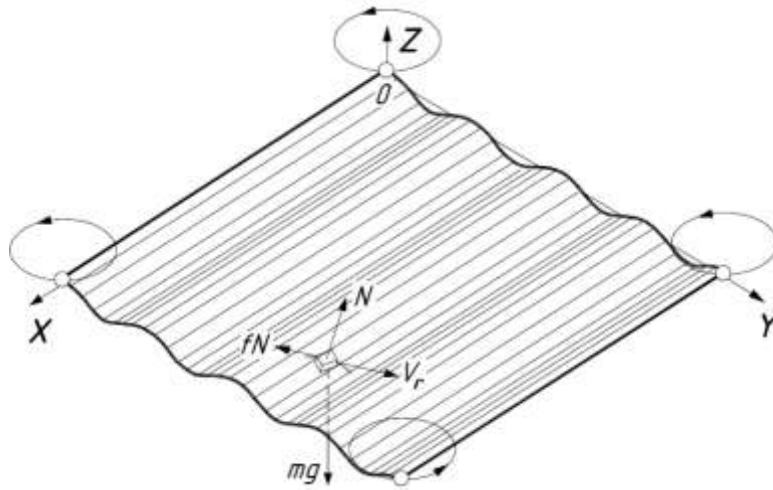


Рис. 1. Схема колових коливань хвилястої поверхні та прикладені до частинки сили

Якщо поверхню прив'язати до рухомої системи координат, то при її коливанні осі рухомої і нерухомої систем весь час будуть паралельними. Це означає, що абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху поверхні, точки якої описують кола, і відносного руху точки по хвилястій поверхні:

$$x = x_e + x_r; \quad y = y_e + y_r; \quad z = z_e + z_r, \quad (2)$$

де  $x_e=x_e(t)$ ;  $y_e=y_e(t)$ ;  $z_e=z_e(t)$  – траєкторія переносного руху поверхні у функції часу  $t$ ;

$x_r=x_r(t)$ ;  $y_r=y_r(t)$ ;  $z_r=z_r(t)$  – траєкторія відносного руху частинки по поверхні у функції часу  $t$ .

Позначимо радіус кіл, по яких рухаються точки циліндра, через  $r$ . Тоді переносний рух точок хвилястої поверхні буде описано рівняннями:

$$x_e = r \cos \omega t; \quad y_e = r \sin \omega t; \quad z_e = 0, \quad (3)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання точок поверхні по колах.

По поверхні точка ковзатиме по певній траєкторії. Рівняння траєкторії можна одержати, якщо зв'язати між собою незалежні змінні  $v$  і  $u$  поверхні (1). Цей зв'язок запишемо через час  $t$ , тобто координати частинки на хвилястій поверхні будуть функціями часу:  $v=v(t)$  і  $u=u(t)$ . У такому випадку відносний рух частинки опишеться рівняннями:

$$x_r = u; \quad y_r = v; \quad z_r = c \sin a v. \quad (4)$$

Сумуючи переносний (3) і відносний (4) рухи за формулою (2), отримаємо рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$\begin{aligned} x &= u + r \cos \omega t; \\ y &= v + r \sin \omega t; \\ z &= c \sin a v. \end{aligned} \quad (5)$$

Залежності  $v=v(t)$  і  $u=u(t)$ , які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по хвилястій поверхні), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (5) по часу  $t$  знайдемо проекції абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned}x' &= u' - r\omega \sin \omega t; \\y' &= v' + r\omega \cos \omega t; \\z' &= acv' \cos a v.\end{aligned}\quad (6)$$

Диференціюванням виразів (6) отримуємо проекції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}x'' &= u'' - r\omega^2 \cos \omega t; \\y'' &= v'' - r\omega^2 \sin \omega t; \\z'' &= ac(v'' \cos a v - av'^2 \sin a v).\end{aligned}$$

Складемо рівняння руху у вигляді  $m\bar{w} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\bar{w}$  – вектор абсолютного прискорення,  $\bar{F}$  – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є (рис. 1): сила ваги  $mg$  ( $g=9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція  $N$  поверхні та сила тертя  $fN$  при ковзанні частинки по поверхні ( $f$  – коефіцієнт тертя). Усі сили потрібно спроекціювати на осі системи координат  $OXYZ$ .

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; 0; -mg\}.$$

Реакція  $N$  поверхні спрямована по нормалі до неї і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній поверхні. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial v} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial v} &= 1; & \frac{\partial Z}{\partial v} &= ac \cos a v; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= 1; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Після векторного множення векторів (7) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі до поверхні запишуться:

$$\left\{0; \quad -\frac{ac \cos a v}{\sqrt{1 + a^2 c^2 \cos^2 a v}}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 c^2 \cos^2 a v}}\right\}.$$

Сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну вектору швидкості ковзання частинки сторону. Напрямок вектора визначається першими похідними рівнянь (4):

$$x'_r = u'; \quad y'_r = v'; \quad z'_r = acv' \cos a v.\quad (8)$$

Геометрична сума складових (8) дасть величину швидкості ковзання частинки по хвилястій поверхні у відносному русі:

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2(1 + a^2 c^2 \cos^2 a v)}.\quad (9)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі системи  $OXYZ$  одержимо діленням проекцій (8) на величину вектора (9):

$$\left\{\frac{u'}{V_r}; \quad \frac{v'}{V_r}; \quad \frac{acv' \cos a v}{V_r}\right\}.\quad (10)$$

Розпишемо векторне рівняння  $m\bar{w} = \bar{F}$  в проекціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя  $fN$  спрямована вздовж одиничного вектора (10) в протилежну до нього сторону:

$$\begin{aligned} m(u'' - r\omega^2 \cos \omega t) &= -fN \frac{u'}{V_r}; \\ m(v'' - r\omega^2 \sin \omega t) &= -\frac{Nac \cos v}{\sqrt{1+a^2c^2 \cos^2 av}} - fN \frac{v'}{V_r}; \\ mac(v'' \cos av - av'^2 \sin av) &= \\ &= -mg + \frac{N}{\sqrt{1+a^2c^2 \cos^2 av}} - fN \frac{acv' \cos av}{V_r}. \end{aligned} \quad (11)$$

До системи (11) входять три невідомі функції:  $N=N(t)$ ,  $u=u(t)$  і  $v=v(t)$ . Розв'язуючи її відносно  $N$ ,  $u''$  і  $v''$ , отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{1}{A^2} [r\omega^2 \sin \omega t + ac(a^2cv'^2 \sin av - g) \cos av] - \frac{fv'}{AV} B; \\ u'' &= r\omega^2 \cos \omega t - \frac{fv'}{AV} B; \\ N &= \frac{m}{A} B, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $A = \sqrt{1 + a^2c^2 \cos^2 av}$ ;  $B = [g + ac(r\omega^2 \cos av \sin \omega t - av'^2 \sin av)]$ .

Система (12) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Знайдені залежності  $v=v(t)$  і  $u=u(t)$  потрібно підставити у рівняння (4) для того, щоб одержати відносну траєкторію руху частинки по хвилястій поверхні, тобто траєкторію ковзання. Якщо амплітуда  $c=0$ , то параметричні рівняння поверхні (1) перетворюються у рівняння горизонтальної площини. У такому випадку система (12) значно спрощується:

$$\begin{aligned} v'' &= r\omega^2 \sin \omega t - fg \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ u'' &= r\omega^2 \cos \omega t - fg \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ N &= mg. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 2 чисельними методами побудовано траєкторію ковзання частинки по площині при наступних параметрах:  $r=0,05$  м,  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $f=0,3$ . Після перехідного процесу траєкторією ковзання частинки є коло, радіус якого менший від кола, яке описують всі точки площини.

На рис. 3 побудовано графік зміни швидкості  $V_r$  ковзання протягом 3 с. Із нього видно, що після перехідного процесу, коли траєкторією відносного руху частинки стає коло, швидкість ковзання стає сталою. Скористаємося цим фактом, щоб знайти аналітичний опис ковзання частинки після стабілізації її руху. При  $\sqrt{u'^2 + v'^2} = V_r = \text{const}$  система (13) розпадається на два незалежні диференціальні рівняння:

$$v'' = r\omega^2 \sin \omega t - fg \frac{v'}{V_r};$$

$$u'' = r\omega^2 \cos \omega t - fg \frac{u'}{V_r}.$$

Їх часткові розв'язки, коли сталі інтегрування дорівнюють нулю, запишуться:

$$v = -\frac{rV_r\omega}{f^2g^2 + V_r^2\omega^2} (fg \cos \omega t + V_r\omega \sin \omega t);$$

$$u = \frac{rV_r\omega}{f^2g^2 + V_r^2\omega^2} (fg \sin \omega t - V_r\omega \cos \omega t). \quad (14)$$

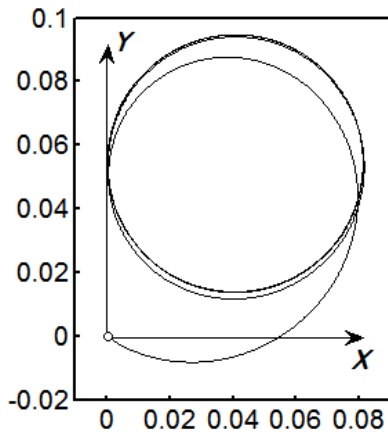


Рис. 2. Траєкторія ковзання частинки

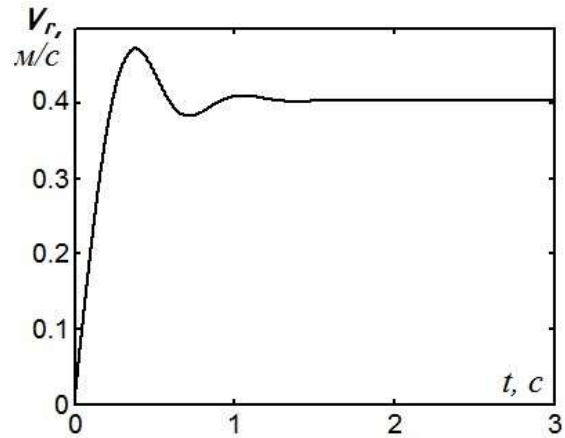


Рис. 3. Графік зміни швидкості частинки

Знайдемо вираз для сталої  $V_r$  через задані параметри коливального руху. Диференціюємо рівняння (14) і знаходимо:

$$V_r = \sqrt{u'^2 + v'^2} = \frac{rV_r\omega^2}{\sqrt{f^2g^2 + V_r^2\omega^2}}. \quad (15)$$

Розв'язавши (15) відносно  $V_r$ , знаходимо:

$$V_r = \frac{\sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2}}{\omega}. \quad (16)$$

Підставляємо (16) у (14) і остаточно знаходимо параметричні рівняння, які описують траєкторію ковзання частинки по площині у відносному русі після його стабілізації:

$$v = -r \sin \omega t + \frac{fg}{r\omega^4} (fg \sin \omega t - \sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2} \cos \omega t);$$

$$u = -r \cos \omega t + \frac{fg}{r\omega^4} (fg \cos \omega t + \sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2} \sin \omega t). \quad (17)$$

Якщо площина абсолютно гладенька, тобто  $f=0$ , то рівняння відносного руху (17) мають протилежний знак рівнянь переносного руху (3), внаслідок чого частинка в абсолютному русі згідно рівнянь (5) залишається нерухомою. Із рівнянь (17) знаходимо радіус  $r_r$  кола, яке описує частинка, ковзаючи по площині після стабілізації руху:

$$r_r = \sqrt{u^2 + v^2} = r \sqrt{1 - \left(\frac{fg}{r\omega^2}\right)^2}.$$

Радіус  $r_r$  наближається до радіуса  $r$  при зменшенні коефіцієнта  $f$  тертя або ж при зростанні кутової швидкості  $\omega$  коливань площини.

Побудуємо відносні траєкторії руху частинки по хвилястій поверхні. Слід зауважити, що форма поверхні повинна бути певним чином обмежена через параметри її поперечного перерізу. Було взято синусоїду зі сталими  $c=0,005$  (амплітуда) і  $a=62,8$  (період  $T=0,1$ ), тобто співвідношення амплітуди до періоду становить  $1:20$ . При менших співвідношеннях відбувається відрив частинки від поверхні. Вказане співвідношення не є усталеним, воно залежить від радіуса  $r$  кіл, по яких відбувається коливання поверхні, кутової швидкості  $\omega$ , коефіцієнта тертя  $f$ .

Випадок перший. Діаметр кіл переносного руху поверхні дорівнює періоду:  $2r=T$ . Цей випадок є характерним, оскільки траєкторія ковзання частинки по поверхні не є замкненою лінією (рис. 4). Траєкторією ковзання є періодична просторова крива, при цьому криволінійне ковзання частинки поширюється в напрямі, близькому до напрямку осі  $OY$ , і частинка при своєму русі долає впадини і гребені поверхні. Напрямок поширення такого руху може відбуватися як у напрямі осі  $OY$ , так і в протилежну сторону. Поведінка частинки залежить від точки попадання на поверхню.

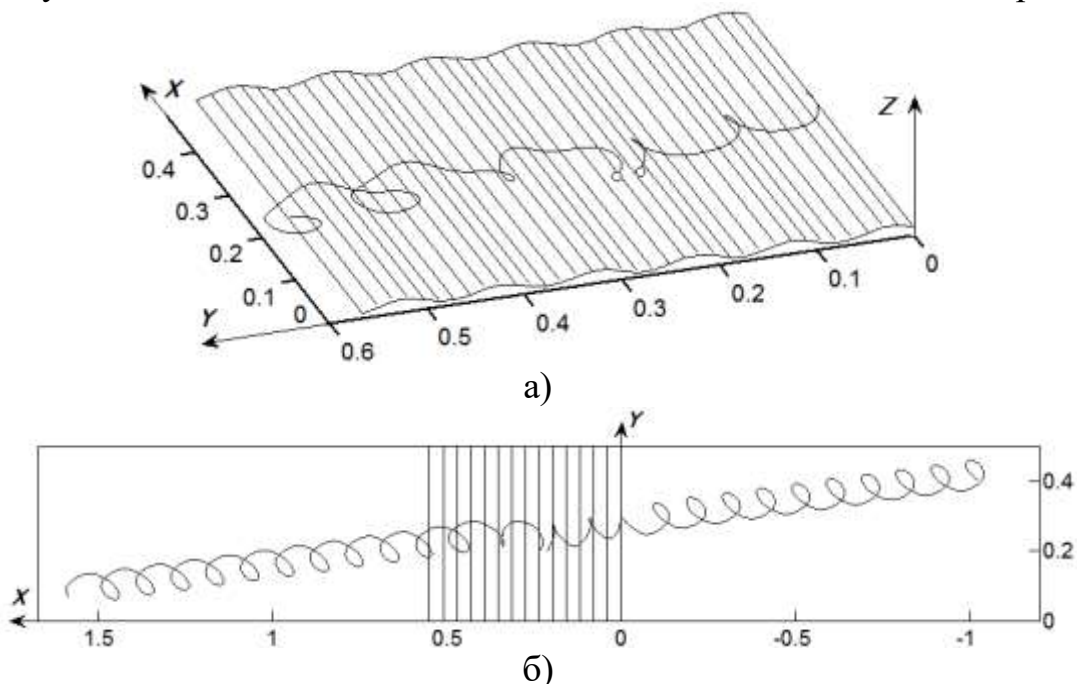


Рис. 4. Траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при  $r=0,05$  м,  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $f=0,3$ ,  $c=0,005$ ,  $a=62,8$ :

а) траєкторії руху частинки на обмеженій ділянці поверхні в аксонометрії;

б) траєкторії руху частинки на горизонтальній проекції протягом  $8$  с

На рис. 4,а побудовано траєкторії відносного руху частинки на обмеженій ділянці поверхні, де відбувається перехідний процес, із зазначенням точки попадання на поверхню. На рис. 4,б показана горизонтальна проекція траєкторій відносного руху частинки, яка рухалася протягом 8 с.

При ковзанні частинки по хвилястій поверхні її реакція  $N$  змінюється на відміну від площини, де  $N=mg$ . На рис. 5 побудовано графік зміни реакції поверхні для частинки масою  $m=0,01$  кг. Він побудований для однієї із траєкторій, зображених на рис. 4,б, і характерний і для іншої траєкторії. При зростанні кутової швидкості коливань  $\omega$  характер поширення коливань не змінюється, однак в певні моменти часу реакція поверхні набуває від'ємних значень, тобто напрям її вектора змінюється на протилежний. У такому випадку траєкторія руху частинки була б реальною, якби вона рухалася між двох паралельних поверхонь. Оскільки в нас тільки одна поверхня, то в момент, коли реакція стає рівною нулю, відбувається відрив частинки від поверхні, тобто подальша її траєкторія стає невідомою. З огляду на це, ми в подальшому розглядаємо тільки такі випадки руху, коли реакція має позитивний знак.

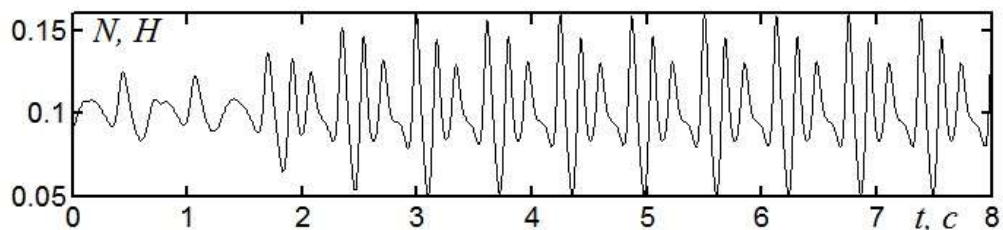


Рис. 5. Графік зміни реакції поверхні на частинку, яка ковзає по хвилястій поверхні

Випадок другий. Діаметр кіл переносного руху поверхні менший за період:  $2r < T$ . У цьому випадку після перехідного періоду траєкторія ковзання частинки стає замкненою. На рис. 6 побудовано траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при всіх попередніх параметрах, включно із точками попадання частинки на поверхню, зі зміною тільки одного параметра:  $r=0,04$  м.

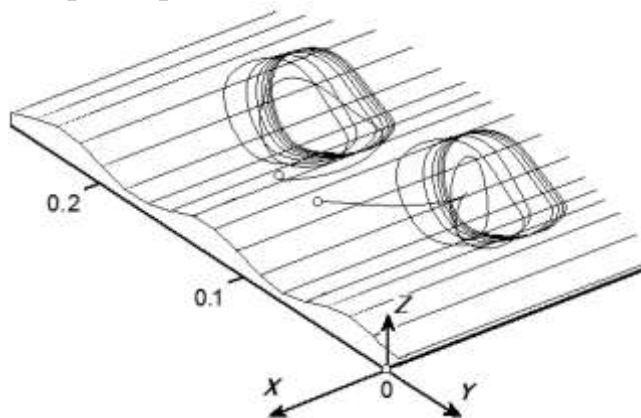


Рис. 6. Траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при  $r=0,04$  м,  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>,  $f=0,3$ ,  $c=0,005$ ,  $a=62,8$



*Випадок третій.* Діаметр кіл переносного руху поверхні більший за період:  $2r > T$ . У цьому випадку перехідний період може тривати досить довго, як показано на рис. 7 (при  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ), або ж швидше переходити до замкненої траєкторії при зростанні кутової швидкості коливань  $\omega$  (при  $\omega = 15 \text{ c}^{-1}$ ).

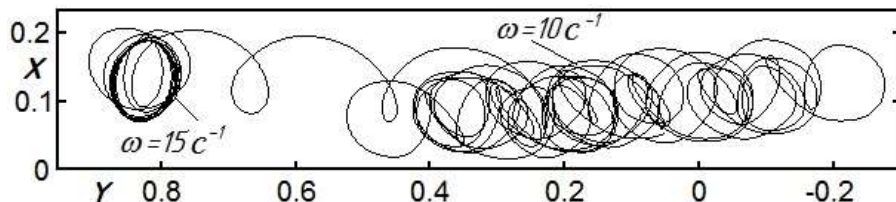


Рис. 7. Горизонтальна проекція траєкторій відносного руху частинки по хвилястій поверхні при  $r = 0,06 \text{ м}$ ,  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ,  $f = 0,3$ ,  $c = 0,005$ ,  $a = 62,8$

При подальшому зростанні радіуса  $r$  частинка після перехідного періоду рухається по замкненій кривій, причому ця замкнена крива збільшується у розмірах відповідно до радіуса  $r$  колових коливань. На рис. 8 побудовано траєкторію ковзання частинки при збільшенні радіуса  $r$  кіл коливань до  $0,07 \text{ м}$ . Якщо зменшувати амплітуду  $c$  синусоїди, то хвиляста поверхня наблизатиметься до площини, а замкнена крива ковзання – до кола.

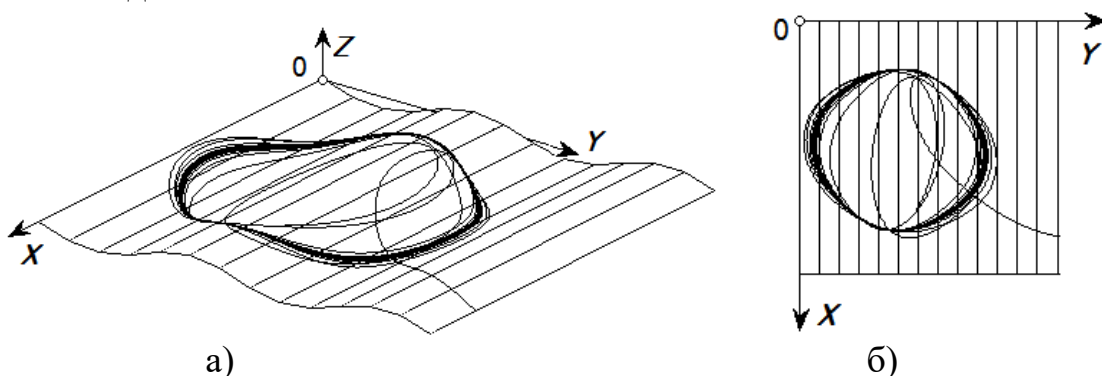


Рис. 8. Траєкторія відносного руху частинки по хвилястій поверхні при  $r = 0,07 \text{ м}$ ,  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ,  $f = 0,3$ ,  $c = 0,005$ ,  $a = 62,8$ :

- а) аксонометричне зображення;
- б) горизонтальна проекція

Розглянуті випадки досить повно відображають можливі траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при її колових коливаннях. У статті не показано вплив коефіцієнта тертя  $f$  на траєкторію ковзання частинки, однак його значення не вносить суттєвих змін на характер кривих ковзання частинки і обмежується розглянутими випадками.

**Висновки.** При колових коливаннях хвилястої лінійчатої поверхні з поперечним перерізом у вигляді синусоїди відносною траєкторією частинки після стабілізації руху може бути замкнена або періодична просторові криві. Для уникнення відриву частинки від поверхні потрібно

задавати режим коливань, який враховує форму поверхні та кінематичні параметри коливань. При діаметрі кола, яке описують всі точки поверхні при її коливанні, рівному періоду синусоїди, траєкторією відносного руху частинки може бути періодична крива. У цьому випадку частинка рухається в напрямі, близькому до поперечного, долаючи впадини і гребні поверхні. У інших випадках траєкторією ковзання є замкнена просторова крива, горизонтальна проекція якої близька до кола.

### *Бібліографічний список*

1. Nguyen V. X., Golikov N.S. Analysis of material particle motion and optimizing parameters of vibration of two-mass GZS vibratory feeder // Journal of Physics Conference Series. – 1015(5):052020, doi: 10.1088/1742-6596/1015/5/052020.

2. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes // In: Ivanov V. et al. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. – 2019. – P. 336–345, doi: 10.1007/978-3-319-93587-4\_35.

3. Matveev A.I., Lebedev I.F., Nikiforova L.V., Yakovlev B.V. Modeling of the particles movement in a screw pneumatic separator / Mining Information and Analytical Bulletin. – 2014. – № 10. – P. 172–178.

4. Hevko R., Zalutskyi S., Hladyo Y., Tkachenko I., Lyashuk O., Pavlov O., Pohrishchuk B., Trokhaniak O., Dobizha N. Determination of interaction parameters and grain material flow motion on screw conveyor elastic section surface // INMATEH–Agricultural Engineering. – 2019. – № 57(1). – P. 123–134.

5. Kresan T.A. Розрахунок гравітаційного спуску, утвореного поверхнею косою закритою гелікоїдою // Техніка та енергетика / Machinery & Energetics. – 2020. – S.1, № 11(2). – P. 49–57, doi: 10.31548/machenergy2020.02.049.

6. Kobets A., Ponomarenko N., Kharytonov M. Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading // INMATEH – Agricultural Engineering. – 2017. – № 51(1). – P. 5–14.

7. Trokhaniak O., Hevko R., Lyashuk O., Dovbush T., Pohrishchuk B., Dobizha N. Research of the of bulk material movement process in the inactive zone between screw sections // INMATEH–Agricultural Engineering. – № 60(1). – P. 261–268.