УДК 514.18

ОБҐРУНТУВАННЯ НЕОБХІДНОСТІ РОЗРОБКИ МЕТОДІВ КОМПОЗИЦІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ

Муртазієв Е.Г., к.пед.н.*
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна, м. Запоріжжя)
Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

Анотація *– надаються пояснення щодо призначення композиційного геометричного моделювання і утворення точкових поліномів. Наголошується, що зміною положення базисних точок вихідної дискретно поданої кривої можна змінювати форму точкового поліному, лишаючи без змін його функціональний базис. На прикладі показано, що і похідна, і інтегральна крива точкового поліному, які здобуті традиційними методами диференціювання та інтегрування, втрачають властивості композиційних кривих. Через це їх не можна застосовувати у композиційному геометричному моделюванні, а треба розробляти для цього нові методи композиційного диференціювання і композиційного інтегрування.*

Ключові слова *– композиційне геометричне моделювання, композиційне диференціювання, композиційне інтегрування.*

Постановка проблеми. Точкові поліноми чи то однопараметричні, чи то двопараметричні, чи то трипараметричні являють собою композиційні криві, тобто такі, рівняння яких утворюються без застосування методів лінійної алгебри. Функціональний базис точкового поліному не є бернштейнівським, його утворюють характеристичні функції, значення і вирази яких здобуваються індивідуально, враховуючи геометричні особливості вихідної дискретно поданої кривої. Значення кожної з характеристичних функцій точкового поліному дорівнює одиниці, коли її індекс збігається з індексом базисної функції і дорівнює нулю – коли індекси різні. За рахунок цього відбувається композиційна інтерполяція. Якщо здійснити диференціювання точкового поліному традиційними методами математичного аналізу, то похідна точкового поліному не є композиційною кривою. Тобто, після диференціювання характеристичні функції втрачають свої властивості. Якщо здійснити інтегрування точкового поліному, то виникне така сама ситуація як і у процесі диференціювання, тобто характеристичні функції первісної втрачають свої композиційні властивості. Отже, постала проблема створення такого диференціювання і інтегрування точкових поліномів, щоб в результаті і його похідна, і його первісна залишалися композиційними кривими.

Аналіз останніх досліджень. Теорія композиційного геометричного моделювання дістала свій розвиток з самого початку у роботах [1, 2, 3, 4, 5]. Однак, в усіх попередніх роботах наразі існуючих взагалі не йдеться про питання диференціювання та інтегрування композиційних кривих – точкових поліномів. Отже, дослідження точкових поліномів щодо їхнього диференціювання та інтегрування наразі є актуальними.

Формулювання цілей. На прикладах застосування традиційних диференціювання та інтегрування, пояснити необхідність створення нових методів композиційного диференціювання та інтегрування, застосування яких, до точкового поліному, залишало б його і похідну, і первісну – композиційними кривими.

Основна частина. Композиційне геометричне моделювання, без застосування громіздких методів аналітичної геометрії і лінійної алгебри, дозволяє створювати обчислювальні алгоритми розв'язання метричних і позиційних задач геометрії у параметричній формі з метою оцифровування креслеників.

Точкові поліноми є безвідносними щодо обох вихідних систем координат через те, що кожна із характеристичних функцій утворюється у параметричній формі. Саме характеристичні функції кожного із точкових поліномів забезпечують композиційну інтерполяцію, тобто інтерполяцію без застосування методів лінійної алгебри. Через це точкові поліноми названо композиційними кривими. Складовими точкових поліномів є добутки кожної з базисних точок, що його дискретно подають, на характеристичну функцію, яка утворюється саме для цієї базисної точки. При цьому, ці добутки базисних точок і характеристичних функцій, за будь-яких операцій над точковими поліномами, лишаються його окремими складовими елементами, тобто не поєднуються поміж собою. Через це, форму композиційних кривих ліній можна змінювати, рухаючи лише його базисні точки, не чіпаючи, при цьому, параметричний базис точкового поліному. Кількість базисних точок вихідної дискретно поданої кривої, які можуть бути композиційно інтерпольовані точковим поліномом, теоретично є необмеженою. Використання точкових поліномів дозволяє розв'язувати метричні та позиційні задачі без застосування методів аналітичної геометрії. А це дозволяє використовувати їх для створення моделей реальних об'єктів з великими базами даних.

Математичний аналіз точкових поліномів, що є композиційними геометричними моделями, потребує застосування методів диференціювання та інтегрування з метою встановлення якісних показників перебігу процесів у реальному об'єкті, який досліджується із застосуванням моделі. Знайдемо похідну та інтеграл точкового поліному.

Для прикладу, розглянемо точковий поліном третього степеня, який інтерполює чотири точки і, який є композиційною кривою:

$$M_3 = A_1 \frac{(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)} + A_2 \frac{(t_1 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)} +$$

$$+ A_3 \frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_4 - t)}{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)(t_4 - t_3)} + A_4 \frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)}{(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)}.$$

Тут вирази біля базисних точок A_i, $i = \overline{1,4}$, є характеристичними функціями, тобто ця крива є композиційною.

Розглянемо характеристичну функцію $p_1(t)$. $p_1(t) = \frac{(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)}$, за значення $t = t_1$: $p_1(t_1) = \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)} = 1$.

За значення $t = t_2$: $p_1(t_2) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_2 - t_2 = 0$; за значення $t = t_3$: $p_1(t_3) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_3 - t_3 = 0$; за значення $t = t_4$: $p_1(t_4) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_4 - t_4 = 0$.

Розглянемо характеристичну функцію $p_2(t)$. $p_2(t) = \frac{(t_1 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)}$, за значення $t = t_2$: $p_2(t_2) = \frac{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)} = 1$.

За значення $t = t_1$: $p_2(t_1) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_1 - t_1 = 0$; за значення $t = t_3$: $p_2(t_3) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_3 - t_3 = 0$; за значення $t = t_4$: $p_2(t_4) = 0$, тому що у чисельнику є помножувач $t_4 - t_4 = 0$.

Аналогічно для $t = t_3$ характеристична функція $p_3(t_3) = 1$:

$p_3(t_3) = \frac{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)(t_4 - t_3)}{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)(t_4 - t_3)} = 1$; для $t = t_1$: $p_3(t_1) = 0$, через помножувач $t_1 - t_1 = 0$; для $t = t_2$: $p_3(t_2) = 0$, через помножувач $t_2 - t_2 = 0$; ля $t = t_4$: $p_3(t_4) = 0$, через помножувач $t_4 - t_4 = 0$.

Аналогічно для $t = t_4$ характеристична функція $p_4(t_4) = 1$:

$p_4(t_4) = \frac{(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)}{(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)} = 1$; для $t = t_1$: $p_4(t_1) = 0$, через помножувач $t_1 - t_1 = 0$; для $t = t_2$: $p_4(t_2) = 0$, через помножувач $t_2 - t_2 = 0$; ля $t = t_3$: $p_4(t_3) = 0$, через помножувач $t_3 - t_3 = 0$.

Цим пояснюється метод композиційної інтерполяції.

Перша похідна цієї кривої матиме вигляд:

$$\begin{aligned} M_3' = {} & A_1 \lambda_1 \left[-3t^2 + 2t(t_2 + t_3 + t_4) - (t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4) \right] + \\ & + A_2 \lambda_2 \left[-3t^2 + 2t(t_1 + t_3 + t_4) - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_3 t_4) \right] + \\ & + A_3 \lambda_3 \left[-3t^2 + 2t(t_1 + t_2 + t_4) - (t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_2 t_4) \right] + \\ & + A_4 \lambda_4 \left[-3t^2 + 2t(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) \right], \end{aligned}$$

де $\lambda_1 = \dfrac{1}{-t_1^3 + t_1^2(t_2 + t_3 + t_4) - t_1(t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4) + t_2 t_3 t_4}$;

$$\lambda_2 = \frac{1}{-t_2^3 + t_2^2(t_1 + t_3 + t_4) - t_2(t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_3 t_4) + t_1 t_3 t_4};$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{-t_3^3 + t_3^2(t_1 + t_2 + t_4) - t_3(t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_4) + t_1 t_2 t_4};$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{-t_4^3 + t_4^2(t_1 + t_2 + t_3) - t_4(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + t_1 t_2 t_3}.$$

Розглянемо помножувачі біля базисних точок $A_i,\ i = \overline{1,4}$, підставивши значення параметрів $t = t_i,\ i = \overline{1,4}$, дістанемо вирази:

$$p_1(t_1) = \lambda_1\left[-3t_1^2 + 2t_1(t_2 + t_3 + t_4) - (t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4)\right] \neq 1;$$
$$p_2(t_2) = \lambda_2\left[-3t_2^2 + 2t_2(t_1 + t_3 + t_4) - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_3 t_4)\right] \neq 1;$$
$$p_3(t_3) = \lambda_3\left[-3t_3^2 + 2t_3(t_1 + t_2 + t_4) - (t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_2 t_4)\right] \neq 1;$$
$$p_4(t_4) = \lambda_4\left[-3t_4^2 + 2t_4(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)\right] \neq 1.$$

Отже, через те, що $p_1(t_1) \neq 1$, $p_2(t_2) \neq 1$, $p_3(t_3) \neq 1$, $p_4(t_4) \neq 1$, усі відповідні вирази $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ не є характеристичними функціями, а похідна $M_3' = A_1 p_1(t) + A_2 p_2(t) + A_3 p_3(t) + A_4 p_4(t)$ не є композиційною кривою. Таким чином, похідна M_3' втрачає переваги композиційних кривих і не може застосовуватись у композиційному геометричному моделюванні. Робимо висновок, що для композиційного геометричного моделювання необхідно розробляти метод диференціювання, за якого похідна точкового поліному залишалась би композиційною кривою.

Розглянемо той же точковий поліном M_3, що є композиційною кривою. Знайдемо його інтеграл:

$$\int M_3(t)dt = A_1\lambda_1\left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}(t_2 + t_3 + t_4) - \frac{t^2}{2}(t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4) + t \cdot t_2 t_3 t_4\right] +$$
$$+ A_2\lambda_2\left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}(t_1 + t_3 + t_4) - \frac{t^2}{2}(t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_3 t_4) + t \cdot t_1 t_3 t_4\right] +$$
$$+ A_3\lambda_3\left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}(t_1 + t_2 + t_4) - \frac{t^2}{2}(t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_2 t_4) + t \cdot t_1 t_2 t_4\right] +$$
$$+ A_4\lambda_4\left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}(t_1 + t_2 + t_3) - \frac{t^2}{2}(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + t \cdot t_1 t_2 t_3\right] + C = M_4.$$

Розглянемо помножувачі біля базисних точок $A_i,\ i = \overline{1,4}$, підставивши в них відповідні значення параметрів $t = t_i,\ i = \overline{1,4}$, дістанемо вирази:

$$q_1(t_1)=\lambda_1\left[-\frac{t_1^4}{4}+\frac{t_1^3}{3}(t_2+t_3+t_4)-\frac{t_1^2}{2}(t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4)+t_1t_2t_3t_4\right]\neq 1;$$

$$q_2(t_2)=\lambda_2\left[-\frac{t_2^4}{4}+\frac{t_2^3}{3}(t_1+t_3+t_4)-\frac{t_2^2}{2}(t_1t_3+t_1t_4+t_3t_4)+t_2t_1t_3t_4\right]\neq 1;$$

$$q_3(t_3)=\lambda_3\left[-\frac{t_3^4}{4}+\frac{t_3^3}{3}(t_1+t_2+t_4)-\frac{t_3^2}{2}(t_1t_2+t_1t_4+t_2t_4)+t_3t_1t_2t_4\right]\neq 1;$$

$$q_4(t_4)=\lambda_4\left[-\frac{t_4^4}{4}+\frac{t_4^3}{3}(t_1+t_2+t_3)-\frac{t_4^2}{2}(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)+t_4t_1t_2t_3\right]\neq 1.$$

Через те, що $q_1(t_1)\neq 1$, $q_2(t_2)\neq 1$, $q_3(t_3)\neq 1$, $q_4(t_4)\neq 1$, усі відповідні вирази $q_i(t)$, $i=\overline{1,4}$, не є характеристичними функціями, а первісна $M_4 = A_1q_1(t)+A_2q_2(t)+A_3q_3(t)+A_4q_4(t)+C$ не є композиційною кривою. Отже, первісна M_4 втрачає переваги композиційних кривих і тому не може бути застосованою у композиційному геометричному моделюванні. Із сказаного випливає, що для композиційного геометричного моделювання необхідно розробляли метод інтегрування, за якого первісна точкового поліному залишалась би композиційною кривою.

Висновки. На прикладі поліному третього степеня показано причини, за наявності яких неможливо застосовувати традиційні методи диференціювання і інтегрування до точкових поліномів. Зроблено висновок про необхідність створення і розробки методів композиційного диференціювання і композиційного інтегрування, застосування яких до точкових поліномів залишали б композиційними і його похідну і його первісну.

Бібліографічний список

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018, 512 с.
2. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108с.
3. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
4. Лисенко К.Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь: дис…к.т.н. Київ. КНУБА, 2022. 267с.
5. Павленко О.М. Порівняльний аналіз композиційної інтерполяції з традиційними методами. Прикладна геометрія та інженерна графіка. К., 2022. Вип. 103. С. 162-174.