

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОСПРЯЖЕНИХ ПРОФІЛІВ ОДНОГВИНТОВИХ НАСОСІВ МУАНО

Куценко Л. М., д.т.н., професор

leokuts@i.ua, ORCID: 0000-0003-1554-8848

Калиновський А. Я., к.т.н., доцент, нач. каф.

kalinovskiy.a@nuczu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1021-5799

Поліванов О. Г., к.т.н, викл. каф.

nuczu.iart.polivanov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6396-1680

Сухарькова О. І. викл. каф.

lena_sukharkova@i.ua, ORCID: 0000-0003-1033-4728

Національний університет цивільного захисту України, м. Харків, Україна

***Анотація** - Наведено геометричні моделі взаємоспряжених профілів одногвинтових насосів Муано (progressing cavity pumps), орієнтованих на використання в промисловості. Особливість таких насосів полягає у тому, що рух ротора відносно корпусу здійснюється за допомогою планетарного механізму (або йому подібного). Запропоновано спосіб розрахунку геометричних форм профілів поверхонь, що обмежують ротор та корпус моделей одногвинтових насосів. При цьому, в процесі експлуатації має здійснюватися поєднання робочих поверхонь ротора і корпусу за умови існування замкнутих камер (капсул). Завдяки цим камерам насоси Муано здатні перекачувати водяні суміші з твердими домішками.*

***Ключові слова:** геометричне моделювання, одногвинтовий насос Муано, епігіпотрохіда, взаємоспряжені криві, обвідні епігіпотрохід.*

Постановка проблеми. Фахівцям з прикладної геометрії особливо до вподоби задачі, подібні моделювання конструкції насоса Муано. Дивує простота його конструкції, а з іншого боку – вражає складність її моделювання. Дійсно, до елементів насосів такого типу входять лише дві гвинтові деталі - ротор і корпус. Крім того, при обкатці в процесі поєднання робочих поверхонь цих деталей повинні утворюватись замкнуті камери (капсули). Завдяки цим камерам насоси Муано здатні перекачувати в'язкі рідини і водяні суміші, які містять механічні домішки. Ця спроможність дозволяє використовувати зазначені насоси аварійно-рятувальними службами при ліквідації наслідків повені. Цьому також сприяє внутрішнє оформлення корпусу, покритого еластичним матеріалом. Унікальність насосів Муано виявляється і у складності їх розрахунків. Мова йде про складність опису геометричних форм їх робочих поверхонь. Взагалі, причина складності досліджень роторно-планетарних машин полягає у тому, що ротор здійснює обертовий рух відносно корпусу за допомогою планетарного механізму (або йому подібного за результатами дії). Тоді

профілі нормальних перетинів корпусу і ротора матимуть вигляд спеціальних кривих - трохоїд та їх обвідних.

Для забезпечення переваг насоса Муано необхідно розробити адекватну математичну модель дії одногвинтових машин. При цьому головна проблема полягає у визначенні геометричних форм поверхонь ротора і корпусу, здатних здійснювати взаємне переміщення із забезпеченням просторового руху замкнених об'ємів (капсул або шлюзів) між поверхнями ротора і корпусу.

В основу способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів одногвинтових насосів Муано було покладено геометричні моделі кривих, одержані у їх нормальних перетинах. Для забезпечення прийняттого взаємного переміщення поверхонь ротора і корпусу слід врахувати те, що зазначені поверхні мають бути взаємоспряженими. Для пояснення слід розглянути контури нормальних перетинів ротора і корпусу як взаємоспряжених кривих в системі координат площини, що перпендикулярна (нормальна) осі насоса. Наочно це виглядає так, що один з контурів має вигляд обвідної параметричної сім'ї, одержаної при русі другого контуру за законом обкатки.

Для реалізації зазначеної ідеї необхідно наряду з використанням означень епітрохоїди та гіпотрохоїди ввести поняття епігіпотрохоїди як кривої в нормальному перетині поверхонь ротора і корпусу. Для цього необхідно розробити спосіб опису епігіпотрохоїдних кривих як періодично розташованих профілів епітрохоїд і гіпотрохоїд. Також необхідно запропонувати формули, які дозволяють точно описати „узагальнені” обвідні сімей епітрохоїд і гіпотрохоїд. В результаті, на основі знайдених аналітичних описів епігіпотрохоїд з'явиться можливість опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохоїдним нормальним перерізом. І, до того ж, має з'явитися можливість обчислення інтегральних характеристик епігіпотрохоїдних контурів ротора і корпусу з додатковим визначенням контактних ліній робочих органів насосів Муано.

Наведене вище вказує на актуальність розробки способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [1] досліджується геометрія статора насоса Муано. Проведено аналіз для випадку трипелюсткового гвинтового насоса, у якому шляхом визначення форми ротора може бути сформована модель статора. Два об'єкти, ротор і статор, перебувають у взаємному русі, в результаті обертання без ковзання (кочення) двох кругових центроїдів. Математичні завдання для насосів Муано сформульовано в роботі [2]. Докладно описано кінематику руху компонентів насоса, які складаються із двох частин, що обертаються відносно одна одної. Форми в осьовому перерізі можуть бути складені зі шматочків гіпоциклоїд, з'єднаних з епіциклоїдами. Зазначено, що

альтернативою цьому може бути крива з постійною відстанню до гіпоциклоїди. В роботах [3, 4] наведено детальний математичний погляд на геометрію насоса Муано. Сформульовано ряд теорем, базуючись на результатах яких можна наближено описати профілі ротора і корпусу роторно-планетарної машини залежно від відношення радіусів ділильних кіл. При цьому в основу зазначеного опису покладено поняття опорної функції (support function). Метод є наближеним (профілі описуються не точно), тому застосування методу обмежене; його впровадження доцільне як перше наближення для роторно-планетарних машин, де корпус виготовлений з еластичного матеріалу – що має місце для насосів Муано. Крім того, метод не дозволяє унаочнити вибір шляху модифікації рівнянь профілів ротора і корпусу залежно від оновленого відношення радіусів ділильних кіл. Опис профілів роторно-планетарних машин за допомогою опорних функцій має певні вади. А саме, у процесі складання рівнянь профілів ротора і корпусу з «опором на математику» сталося приховування геометричної сутності послідовних етапів новоутворення форм. На відміну від зазначеного, доцільним буде процес складання рівнянь профілів насосів Муано з «опором на геометрію».

Саме такий підхід наведено в роботах [5, 6] і рекомендується для подальших досліджень. Сутність базується на спостереженні, що результуючі профілі ротора і корпусу насосів Муано складаються з циклічно розташованих фрагментів епітрохоїд і гіпотрохоїд залежно від кута обкатки. Тому постає задача знайти формули, за допомогою яких вдалось би формально «розподілити» на колі фрагменти епітрохоїд і гіпотрохоїд залежно від кута обкатки.

Аналіз літературних джерел показує, що звичайне вдосконалення одногвинтових насосів здійснюється переважно за рахунок підвищення якості матеріалів робочих поверхонь та вдосконалення технологій їх виготовлення. Поліпшення одногвинтових насосів можна здійснити і за рахунок пошуку адекватних геометричних форм робочих поверхонь ротора і корпусу. При цьому ще не дослідженим виявилось профілювання корпусу і ротора у вигляді комбінації періодично розташованих фрагментів гіпотрохоїд та епітрохоїд.

Тому актуальною темою є розробка способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах.

Постановка завдання. Метою дослідження є розробка способу розрахунку профілів робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні завдання:

- з використанням епітрохоїди та гіпотрохоїди ввести поняття епігіпотрохоїди як кривої в нормальному перетині поверхонь ротора і корпусу;

- знайти аналітичний опис епігіпотрохоїдних кривих та довести їх взаємоспряженість.

Основна частина. Оберемо в декартовій системі координат Оху нерухоме коло радіуса R з центром в початку координат, по якому без проковзування котиться коло радіуса r . Спочатку розглянемо традиційний спосіб побудови трохоїдних кривих – гіпотрохоїди та епітрохоїди.

Нехай коло меншого радіуса r котиться всередині більшого кола радіуса R . Тоді гіпотрохоїду накреслить точка, яка зафіксована на рухомому колі. Рівняння гіпотрохоїди має вигляд

$$\begin{aligned}x_G &= (R - r) \cos t + r \cos\left(\frac{R - r}{r} t\right); \\y_G &= (R - r) \sin t - r \sin\left(\frac{R - r}{r} t\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Тут і далі R і r радіуси більшого і меншого кіл, t - параметр.

Якщо коло меншого радіуса r котиться зовні більшого кола радіуса R , то епітрохоїду накреслить точка, зафіксована на рухомому колі. При цьому епітрохоїда має рівняння

$$\begin{aligned}x_E &= (R + r) \cos t - r \cos\left(\frac{R + r}{r} t\right); \\y_E &= (R + r) \sin t - r \sin\left(\frac{R + r}{r} t\right).\end{aligned}\tag{2}$$

Зазначимо, що рівняння (1) і (2) відрізняються лише знаком при r , що необхідно враховувати при побудовах. В цих прикладах побудови трохоїд центр рухомого кола радіуса r має координати:

$$x_C = (R - r) \cos t; \quad y_C = (R - r) \sin t.\tag{3}$$

А рухоме коло будується за законом обкатки

$$x = (R - r) \cos t + r \cos \varphi; \quad y = (R - r) \sin t + r \sin \varphi.\tag{4}$$

Тут φ - параметр визначення положення точки на рухомому колі.

Далі реалізуємо зв'язок між гіпотрохоїдою та епітрохоїдою за допомогою нового введеного поняття *епігіпотрохоїди*. Для цього вважатимемо, що формоутворення профілів ротора і корпусу здійснюється в результаті обкатки двох кіл, послідовно, за епітрохоїдним та гіпотрохоїдним законами. Одержану криву пропонується назвати епігіпотрохоїдою. Тобто будемо розглядати комплексну криву, яка по черзі складена з кусків епітрохоїд чи гіпотрохоїд. Для зручності використання такого роду графічної інформації запропоновано спосіб опису епігіпотрохоїд у параметричному вигляді $x=x_{EG}$, $y=y_{EG}$ за умови, що вирази для функцій x_{EG} і y_{EG} представлені у вигляді єдиного аналітичного виразу.

А також, що вирази для функцій x_{EG} і y_{EG} заключають у себе одночасно інформацію про гіпотрохоїду та епітрохоїду (залежно від кута обкатки).

Далі вважатимемо, що величина радіуса меншого кола повинна бути $R-1$ відносно значення радіуса R більшого кола. Зазначимо, що одиниця тут визначає умовну «одиницю» виміру. Тому не дивно, що далі також будуть розглядатися кола радіуса 0.5.

Далі наведемо спосіб конструювання аналітичних виразів із застосуванням операції «взяття модуля числа». Тобто ідея аналітичного опису епігіпотрохоїд базується на співвідношенні

$$F = \frac{1}{2} \left(f_1 + f_2 + (f_1 - f_2) \frac{x - a}{|x - a|} \right). \quad (5)$$

З використанням формули (5) зручно складати алгоритм розподілу величин функції $F(x)$ за принципом «до» і «після» набуття значення a її аргументу x . Тобто при $x < a$ маємо $F(x) = f_1$, а при $x > a$ одержимо $F(x) = f_2$.

Твердження. Параметричні рівняння епігіпотрохоїди залежно від значення радіуса R мають вигляд:

$$x_{EG} = \frac{1}{2} \left(x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right), \quad (6)$$

$$y_{EG} = \frac{1}{2} \left(y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right).$$

На рис. 1 зображено епігіпотрохоїдні криві для різних значень радіуса R . Легко помітити, що кожна з кривих складається з циклічно розташованих кусків епітрохоїд і гіпотрохоїд.

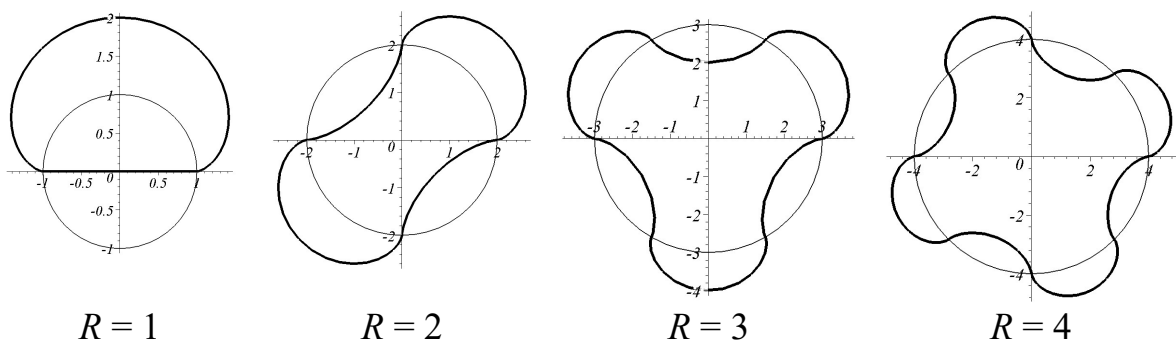


Рис. 1. Ряд епігіпотрохоїдних кривих для кола радіуса R

За схемою обкатки роторно-планетарного механізму в глобальній системі декартових координат Oxy вважатимемо, що коло радіуса R є нерухомим, а коло радіуса $R-1$ котиться без ковзання по його внутрішній частині. Контур ротора жорстко пов'язаний із колом радіуса $R-1$ і описаний в рухомій системі координат OXY рівнянням $X = X_{EG}(t)$; $Y = Y_{EG}(t)$.

Реалізувати обкатку контурів ротора і корпусу за схемою планетарного механізму будемо за допомогою формул (7)

$$x_P = x_C + X_{EG}(t) \cos \theta + Y_{EG}(t) \sin \theta; \quad (7)$$

$$y_P = y_C - X_{EG}(t) \sin \theta + Y_{EG}(t) \cos \theta,$$

де $x_C = \cos(R-1)\theta$ і $y_C = \sin(R-1)\theta$ - координати центра рухомого кола.

Пропонується таке правило формування епігіпотрохійних кривих при профілюванні роторних машин із більшим радіусом діляльного кола R :

- в якості профілю ротора слід обрати епігіпотрохоїду, побудовану за допомогою кіл радіусів $R-1$ і 0.5 і описану в рухомій системі координат OXY ;
- в якості профілю корпусу слід обрати епігіпотрохоїду, побудовану за допомогою кіл радіусів R і 0.5 , і описану в нерухомих координатах Oxy ;
- за допомогою формул зв'язку між координатами (7) необхідно реалізувати sprzęження двох профілів у процесі обкатки.

Наведені результати покладено в основу програми для реалізації алгоритму комп'ютерної обкатки. В результаті її виконання одержано кадри анімації руху ротора. На рис. 2– 4 зображено кадри комп'ютерної анімації за різних значень R з епігіпотрохоїдами в якості робочих контурів. Це на графічному рівні ілюструє (і доводить) факт взаємоспруженості зазначених епігіпотрохійних кривих.

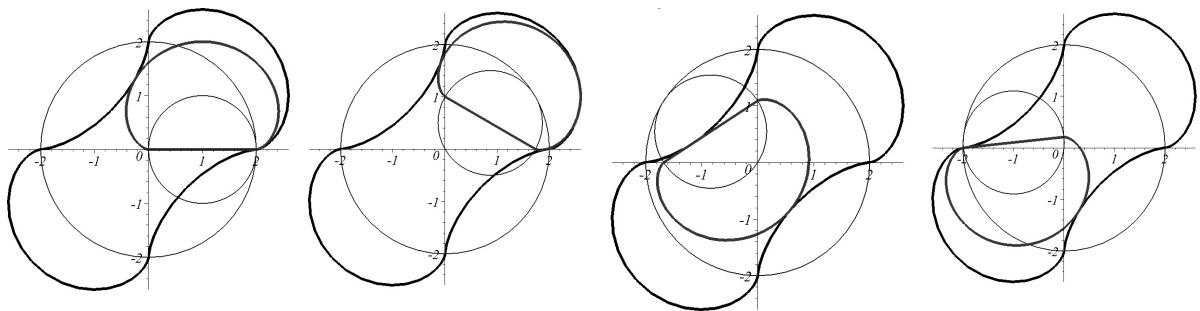


Рис. 2. Фази руху епігіпотрохійного механізму для радіуса $R = 2$

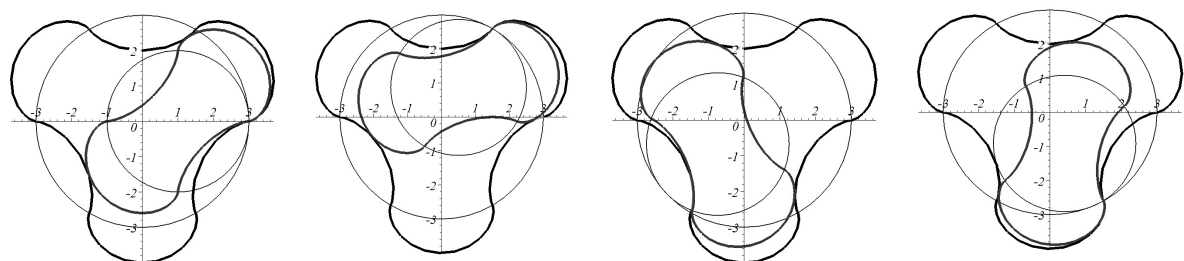


Рис. 3. Фази руху епігіпотрохідного механізму для радіуса $R = 3$

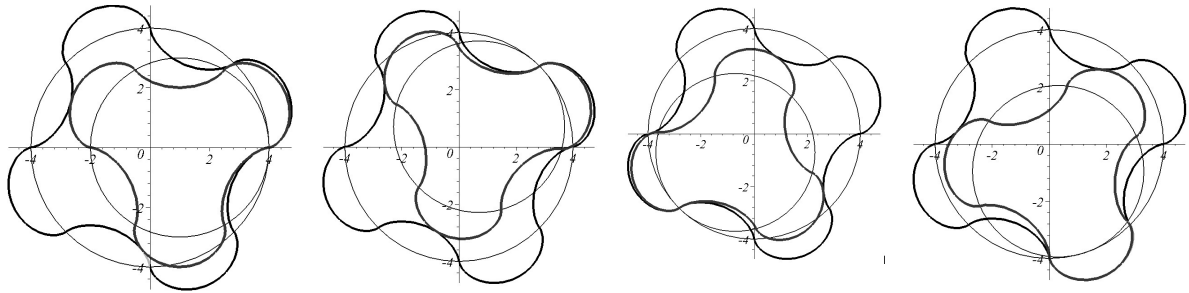


Рис. 4. Фази руху епігіпотрохідного механізму для радіуса $R = 4$

Нехай для нормальних перетинів згідно з виразами (6) і (7), маємо, відповідно, описи корпусу $x = x_{EG}(t)$; $y = y_{EG}(t)$ та ротора $x = X_{EG}(t)$; $y = Y_{EG}(t)$. Тоді рівнянням циліндричної гвинтової поверхні корпусу буде

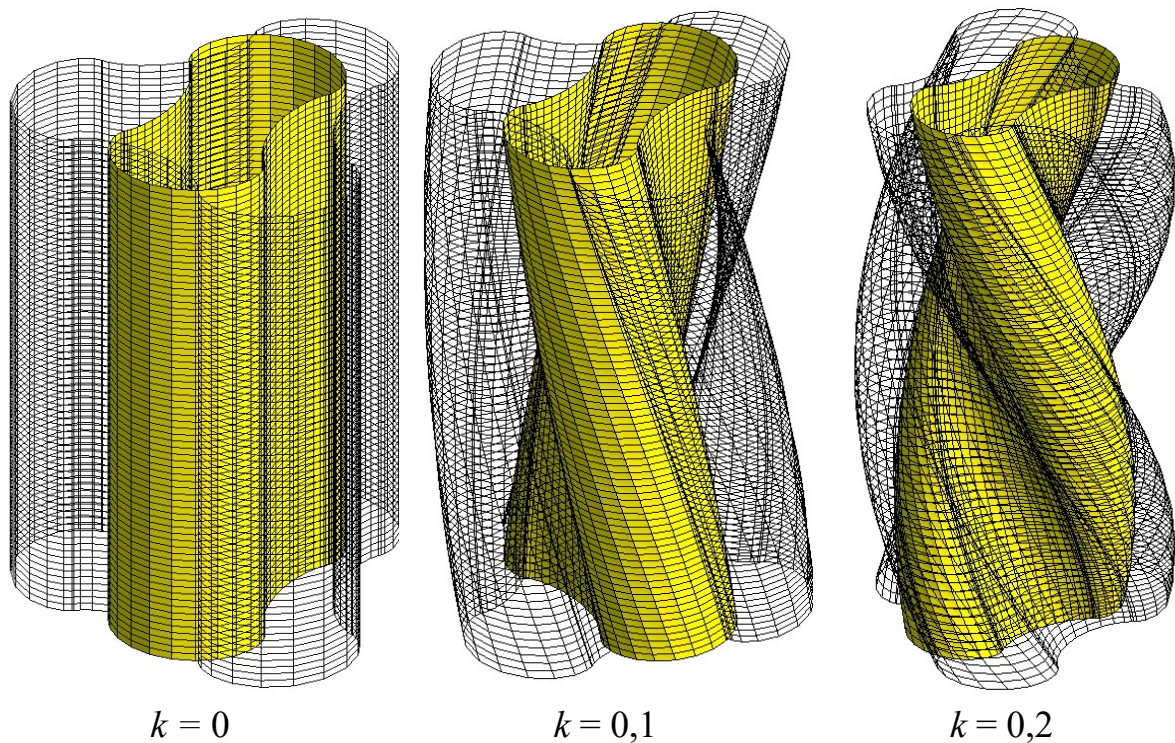
$$\begin{aligned} x &= x_{EG}(t) \cos kC + y_{EG}(t) \sin kC; \\ y &= -x_{EG}(t) \sin kC + y_{EG}(t) \cos kC; \\ z &= C, \end{aligned} \quad (8)$$

а рівнянням циліндричної гвинтової поверхні ротора буде

$$\begin{aligned} x &= X_{EG}(t) \cos kC + Y_{EG}(t) \sin kC; \\ y &= -X_{EG}(t) \sin kC + Y_{EG}(t) \cos kC; \\ z &= C, \end{aligned} \quad (9)$$

де k - коефіцієнт скруту поверхні; $k = \frac{h}{2\pi}$, тут h - крок гвинта.

Складено малюнок- програму уявлення процесу обертання поверхні ротора всередині поверхні корпусу за законом роторно-планетарного руху. На рис. 5 при різних значеннях коефіцієнту скруту поверхні зображено кадри анімації фаз руху епігіпотрохідного механізму для ділильного радіуса великого кола $R = 3$.



$k = 0$

$k = 0,1$

$k = 0,2$

Рис. 5. Циліндричні гвинтові поверхні з епігіпотрохідними нормальними перетинами

Подальші плани. Необхідно визначити геометричні форми контактних областей робочих поверхонь насоса Муано. Тобто проілюструвати феномен епігіпотрохідних пар, згідно з яким в процесі поєднання робочих поверхонь деталей має забезпечуватись існування замкнених камер (капсул). Саме завдяки цим камерам насоси Муано здатні перекачувати рідини з твердими домішками.

Висновки.

1. Описано криву епігіпотрохоїду, яка по черзі складена з кусків епітрохоїд чи гіпотрохоїд залежно від кута обкатки. Рівняння епігіпотрохоїди можна записати у параметричному вигляді $x=x_{EG}$, $y=y_{EG}$ за умови, що вирази для функцій x_{EG} і y_{EG} представлені у вигляді єдиного аналітичного виразу.

2. Знайдено аналітичний опис епігіпотрохоїдних кривих та доведено їх взаємоспряженість. Запропоновано *правило застосування епігіпотрохоїдних кривих* при профілюванні роторних машин із більшим радіусом кола R :

- в якості профілю ротора слід обрати епігіпотрохоїду, побудовану за допомогою кіл радіусів $R-1$ і 0.5 і описану в рухомій системі координат OXY ;
- в якості профілю корпусу слід обрати епігіпотрохоїду, побудовану за допомогою кіл радіусів R і 0.5 , і описану в нерухомих координатах Oxy ;
- за допомогою формул зв'язку між координатами (7) реалізувати спряження двох профілів у процесі обкатки.

Бібліографічний список

1. Baroiu N., Morosanu G.-A., Frumuşanu G., Teodor V. Study of the stator geometry for a Moineau pump. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. January 2021, 12 p.
URL:https://www.researchgate.net/publication/348549455_Study_of_the_stator_geometry_for_a_Moineau_pump
2. Donaldson J., Feng Y., Gennip Y.V., Grann H. Mathematical problems for Moineau pumps. Center for analysis, scientific computing and applications, orthopaedic biomechanics, discrete algebra and geometry. 2006. 49 p.
URL:<https://research.tue.nl/en/publications/mathematical-problems-for-moineau-pumps/fingerprints/>
3. Gravesen J. The geometry of the Moineau pump. *Computer Aided Geometric Design*. December 2008. Vol. 25, no. 9. P. 792-800.
URL:<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167839608000794?via%3Dihub>
4. Gravesen, J. et al., Mathematical problems for Moineau pumps, 2006, in Final report for the 57th European Study Group with Industry,
<http://www2.mat.dtu.dk/ESGI/57/report/grundfos.pdf>
5. Лінчевський Є. А. Геометричне моделювання епігіпотрохідних профілів роторно-планетарних машин. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2010. Вип. 84. С. 259-264.
6. Лінчевський Є. А. Геометричне моделювання епігіпотрохідних профілів одновинтових насосів Муано / Є. А. Лінчевський, Л. М. Куценко, А. Я. Калиновський, В. О. Семків, С. Ю. Назаренко, О. І. Сухарькова // Проблеми надзвичайних ситуацій. НУЦЗУ, - 2022. - № 2(36). - С. 195-218