УДК 514.18

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ І МОЖЛИВОСТІ КОМПОЗИЦІЙНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Верещага В.М., д.т.н., професор
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Адоньєв Є.О., д.т.н., доцент
evgen.adoniev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1279-4138
Муртазієв Е.Г., к.пед.н., доцент
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
Верещага І.В., математик, системний програміст
ivereshchaha@gmail.com
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна, м. Запоріжжя)
Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

Анотація *– у статті досліджуються математичні методи, які застосовуються наразі у нейронних мережах з метою обґрунтування можливості використання методів композиційної геометрії у процесі машинного навчання штучного інтелекту. Розвиток штучного інтелекту у 50-х – 60-х роках минулого століття зрушив з місця після того, як його створювачі відмовились від застосування алгебраїчних методів і звернулися до геометричних, які, у свою чергу, призвели до розуміння аналогічних процесів у природі і до створення нейронних мереж. Однак, наразі, всередині нейронних мереж використовується алгебраїчна математика, методи якої, за ресурсовитратністю, поступаються методам геометричної математики.*

Ресурсовитратність алгебраїчної математики завжди є більшою ніж ресурсовитратність геометричної математики, якою є композиційна геометрія. Приведений у статті аналіз показав, що композиційну геометрію можна застосовувати як математичний метод нейронних мереж з метою машинного навчання штучного інтелекту. Розглянуто принципи утворення смуги дифпроєкцій. Надано точкові рівняння традиційної (Ньютона-Лейбниця) першої похідної і точкове рівняння композиційної першої похідної. Говориться про можливість утворення для композиційної поверхні диференціальної композиційної поверхні і з використанням цієї диференціальної компоповерхні висловлюється ідея розробки композиційного методу градієнтного спуску.

Ключові слова *– композиційна геометрія, композиційна похідна, смуга дифпроєкцій, композиційний метод градієнтного спуску.*

Постановка проблеми. Зменшення ресурсовитратності під час машинного навчання з метою розпізнавання об'єктів штучним інтелектом є проблемою. Особливо під час війни, коли долі секунди вирішують – жити чи ні. Маленьким кроком до розв'язання цієї проблеми і є ця стаття.

Аналіз останніх досліджень. Композиційна геометрія є новим науковим напрямком обчислювальної геометричної математики, що створений і розробляється Мелітопольською школою прикладної геометрії імені Володимира Найдиша при МДПУ імені Богдана Хмельницького. Шлях розвитку композиційної геометрії можна відстежити за роботами [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Мову програмування Python [11] покладено в основу функціонування нейронних мереж і машинного навчання штучного інтелекту щодо розпізнавання об'єктів.

Формулювання цілей статті. Показати можливість і перспективи застосування композиційної геометрії як геометричної математики для функціонування нейронних мереж з метою розробки, у подальшому, методик машинного навчання штучного інтелекту з її використанням.

Основна частина.

1. Композиційна геометрія – це обчислювальна геометрична математика, що ґрунтується на методах точкового БН-числення (Балюби-Найдиша) числення.
2. Композиційні геометричні об'єкти – це композиційна крива лінія, це композиційна поверхня, це композиційне геометричне тіло.
3. Алгебраїчні геометричні об'єкти – це алгебраїчні криві лінії, це алгебраїчні поверхні, це алгебраїчні тіла.
4. У чому полягає різниця між композиційними і алгебраїчними об'єктами? Різниця між ними у функціональних базисах.

Алгебраїчні об'єкти функціональним базисом мають базис Бернштейна, який є безвідносним щодо вихідного об'єкту, для якого створюється математична модель. Функціональний базис композиційних об'єктів утворюється окремо для кожної геометричної композиції і враховує усі її геометричні особливості. Крім того, кожна складова композиційного функціонального базису являє собою просте відношення трьох точок, що є інваріантом паралельного проєктування.

5. Композиційні об'єкти реалізують обчислювальну геометричну математику. Алгебраїчні об'єкти реалізують алгебраїчну математику. Алгебраїчні поліному:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\,;\ z = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot y^i\,;\ \Rightarrow\ z = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right)^i \qquad (1)$$

Для утворення більш складних алгебраїчних геометричних образів розв'язуються системи рівнянь із аналогічних (1).

Композиційні точкові поліноми:

$$M(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot p_i(t)\Rightarrow M_x(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p_i(t)\,;M_y(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot p_i(t)\,;$$
$$M_z(t)=\sum_{i=1}^{n} z_i\cdot p_i(t). \tag{2}$$

Для утворення більш складних композиційних образів складаються сукупності із (2).

6. Алгебраїчна традиційна (Ньютона-Лейбниця) перша похідна точкового поліному (2):

$$M_x{}'(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p_i{}'(t)\,;M_{y_i}{}'(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot p_i{}'(t)\,;\;M_z{}'(t)=\sum_{i=1}^{n} z_i\cdot p_i{}'(t), \tag{3}$$

де $p_i{}'(t)$ – похідні характеристичних функцій, які не підкорюються простому відношенню трьох точок, через це усі подальші дії з (3) здійснюються за алгебраїчною математикою.

Композиційна перша похідна точкового поліному (2):

$$M_{kx}^{\prime(t)}=\sum_{i=1}^{n} x_i{}'\cdot p_i(t)\,;M_{ky_i}^{\prime(t)}=\sum_{i=1}^{n} y_i{}'\cdot p_i(t)\,;\;M_{kz}^{\prime(t)}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} z_i{}'\cdot p_i(t). \tag{4}$$

Або у загальному вигляді:

$$M'(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i{}'\cdot p_i(t)\,,t_1\le t\le t_n. \tag{5}$$

Як бачимо (4), (5) характеристичні функції $p_i(t)$ не диференціюються, а знаходяться значення похідних $A_i{}'$, $x_i{}'$, $y_i{}'$, $z_i{}'$ у базисних точках.

7. Смуга дифпроєкцій – це значення похідної у базисних точках супровідної ламаної лінії дискретної кривої, що обчислюються методами точкового БН-числення, і встановлюють межі можливих змін похідних кривої лінії, які не викликають появи точок перегину (рис. 1).

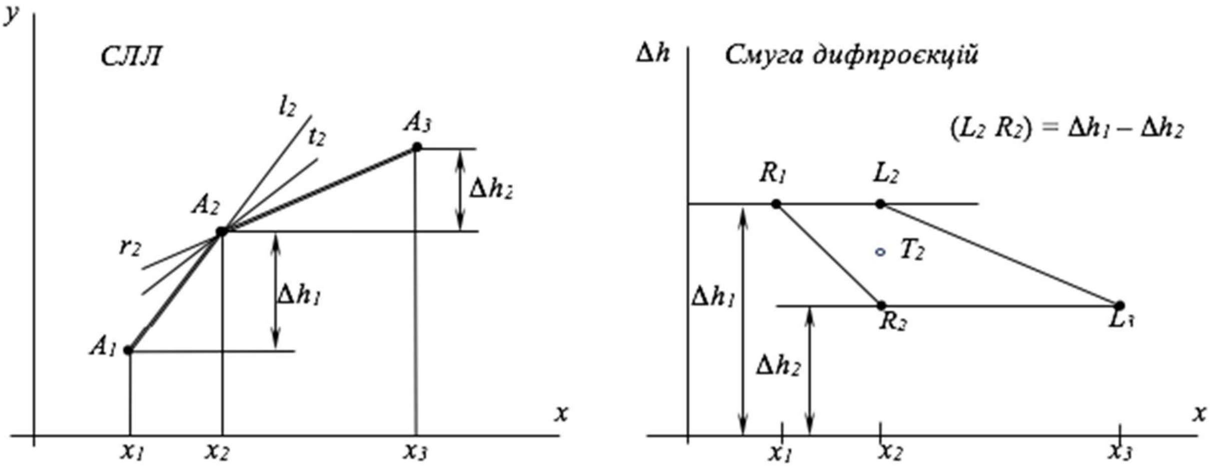


Рис. 1. Фрагмент смуги дифпроєкцій для сегменту СЛЛ $A_1A_2A_3$

8. Як показало обчислення, із (3) та (4), численних прикладів:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i'(t_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i(t_j)\text{, для } j = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

тобто традиційні (Ньютона-Лейбниця) та композиційні похідні, за будь-яких значень параметрів $t = t_j$, у базиснихточках, дорівнюють одне одному, а у поточних – відрізняються на величину обчислювальної похибки (10^{-8} або 10^{-9}).

9. Точкове рівняння композиційної поверхні являє собою двопараметричний точковий поліном і має вигляд:

$$M_{lm}(U,V) = \sum_{i=j=1}^{l,m} A_{ij} \cdot p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V), \qquad (7)$$

де $p_{ij}(U), q_{ij}(V)$ – характеристичні функції за параметричними напрямами, відповідно, U та V.

Традиційна перша похідна для (7) виглядатиме:

$$M'_{lm}(U,V) = \sum_{i=j=1}^{l,m} A_{ij} \cdot p'_{ij}(U) \cdot q'_{ij}(V), \qquad (8)$$

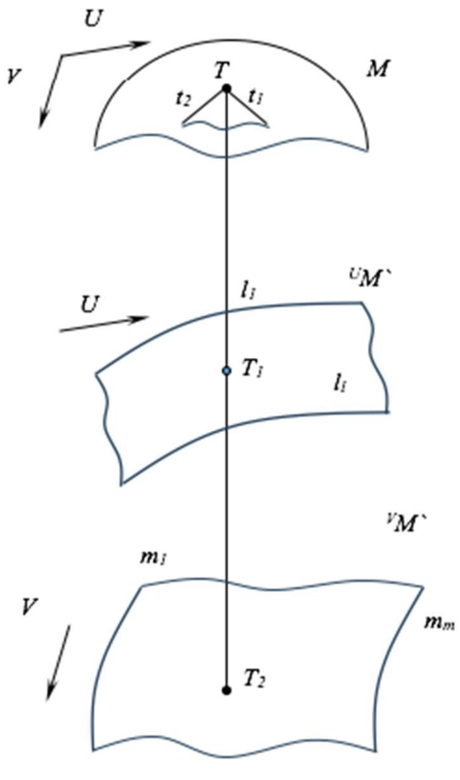
Рівняння (8) втрачає властивості композиційної поверхні через те, що $p'_{ij}(U) \cdot q'_{ij}(V)$ не є простим відношенням трьох точок. Тобто (8) після традиційного диференціювання перетворюється у алгебраїчне рівняння поверхні.

Композиційна перша похідна для (7) виглядатиме як сукупність двох диференціальних поверхонь:

$$\left.\begin{aligned} {}^{\mathrm{U}}M'_{lm}(U,V) &= \sum_{i=j=1}^{l,m} {}^{\mathrm{U}}A'_{ij} \cdot p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V) \\ {}^{\mathrm{V}}M'_{lm}(U,V) &= \sum_{i=j=1}^{l,m} {}^{\mathrm{V}}A'_{ij} \cdot p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V) \end{aligned}\right] \quad (9)$$

Два рівняння із (9) є сукупними через те, що у них однакові функціональні базиси, кожне з яких є композиційним через те, що добуток двох простих відношень являє собою просте відношення трьох точок. Тобто $p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V)$ – є характеристичною функцією. Тут у (9) ${}^{\mathrm{U}}A'_{ij}$, ${}^{\mathrm{V}}A'_{ij}$ – є значення композиційних похідних у базисній точці A_{ij}, відповідно, за параметричними напрямами *U* та *V*, що обираються за використання смуг дифпроєкцій за напрямами.

Перше рівняння із (9) являє собою неперервний каркас диференціальної композиційної поверхні із неперервних комполіній за параметричним напрямом *U*. Друге рівняння із (9) являє собою неперервний каркас диференціальної композиційної поверхні із неперервних композиційних ліній за параметричним напрямом *V*. Візуалізуємо сукупність (9) на рис. 2.



Позначення:

M – вихідна композиційна поверхня;

${}^{U}M$\`, ${}^{V}M$\` – диференціальні композиційні поверхні за напрямами;

T_1 – визначає дотичну t_1 у точці *T*;

T_2 – визначає дотичну t_2 у точці *T*;

t_1, t_2 – визначають дотичну площину до поверхні *M* у точці *T*, яку позначимо: $T(t_1, t_2)$;

$l_1,\ldots, l_l$; $m_1,\ldots, m_m$ – перша і остання неперервні лінії відповідних каркасів поверхонь ${}^{U}M$\` та ${}^{V}M$\`.

Рис. 2. Схема композиційного диференціювання композиційної поверхні.

Зауваження. У композиційній геометрії будь-яку дискретну поверхню, утворену каркасом неперервних ліній завжди можна перетворити у неперервну через те, що усі геометричні об'єкти у ній утворюються з використанням композиційних матриць шляхом утворення сукупностей. Це чи не найголовніша перевага над алгебраїчними методами, які потребують для цього розв'язання систем рівнянь.

10. Визначення дотичної площини T $(t_1\ ,\ t_2)$ до композиційної поверхні M (рис. 2) дозволить розробити ефективний композиційний метод градієнтного спуску, який застосовується нейронними мережами для оптимізації вагових коефіцієнтів у процесі машинного навчання штучного інтелекту.

11. Сума сигналів X, що утворюється на вході у нейронну мережу, має запис, який за формою і змістом є одинаковим із записом відповідного точкового поліному. Наприклад: $x = a \cdot w_a + b \cdot w_b + c \cdot w_c$ і відповідний точковий поліном $L = A_1 \cdot p_1(t) + A_2 \cdot p_2(t) + A_3 \cdot p_3(t)$. Тут a, b, c – значення сигналів на вході у нейронну мережу, яким у відповідність можна поставити точки A_1, A_2, A_3. Ваговим коефіцієнтам зв'язків у нейронних мережах w_a, w_b, w_c – у відповідність можна поставити характеристичні функції $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$. При цьому, w_a, w_b, w_c обираються випадковим чином, а $p_i(t)$ можна обчислювати, виходячи із вихідних умов задачі.

Застосування точкових поліномів і композиційних матриць для розповсюдження сигналів, що є на вході, нейронною мережею надасть можливість застосовувати для цього складніші схеми розповсюдження у прямому напрямі, які призведуть до скорішого результату щодо машинного навчання. Також оптимізація похибок, із застосуванням точкових поліномів у зворотньому напрямку нейронною мережею, призведе до швидшого розпізнавання шуканого об'єкту.

Висновки. За певного доопрацювання деяких теоретичних питань композиційної геометрії, є сенс розпочинати розробку методик її застосування у нейронних мережах в процесах машинного навчання штучного інтелекту щодо розпізнавання об'єктів.

Бібліографічний список

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018, 512с.
2. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108с.
3. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
4. Лисенко К.Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь: дис…к.т.н. Київ. КНУБА, 2022. 267с.
5. Лисенко К.Ю. Точкові композиційні матриці. Збірник тез доповідей Обухівські читання» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с. 97-99.

6. Верещага В.М. О поле дифпроекций эмпирической кривой. Начертательная геометрия и черчение» (межвузовский сборник) - Алма-Ата, 1979 - с. 63-66.
7. Верещага В.М. Про необхідність розробки методів композиційного диференціювання та композиційного інтегрування. Збірник тез доповідей Обухівські читання» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с.108-110.
8. Лисенко К.Ю., Верещага В.М. Елементи композиційного диференціювання у точковій формі. Прикладна геометрія, інженерна графіка. Випуск 103. КНУБА, 2023 р., с.114-122.
9. Муртазієв Е.Г., Верещага В.М. Узагальнений графічний аналіз кривих з використанням їхніх похідних. Прикладна геометрія та інженерна графіка. К., 2022, Вип. 103. с. 142-150.
10. Муртазієв Е.Г. Алгоритм утворення смуги дифпроєкцій та визначення композиційних похідних у базисних точках. Збірник тез доповідей «Обухівські читання» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с. 102-105.