

ГЕОМЕТРИЧНО-НЕЛІНІЙНІ БАЛКИ В ЗАДАЧАХ ПОБУДОВИ СПЛАЙНІВ ОПТИМАЛЬНОЇ ФОРМИ

Мазурик Р.В. аспірант

r.mazuryk.ua@gmail.com ORCID: 0009-0006-3037-1277

Кольцов Д.Р. аспірант

koltsovdd@gmail.com ORCID: 0000-0002-0396-7255

Ориняк І.В. д.т.н., професор

igor_orinyak@yahoo.com ORCID: 0000-0003-4529-0235

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

***Анотація:** В роботі розглядається застосування геометрично-нелінійних (ГН) балок в задачах побудови кривих оптимальної форми. ГН балки побудовано з допомогою методу базових та згладжувальних рішень і порівнюються з коротацийними балковими сплайнами (КБС) та відомими сплайнами Безьє. Якість отриманих кривих оцінюється на основі критерію інтегральної енергії деформації.*

***Ключові слова:** геометричне моделювання, балки, нелінійність, сплайни Безьє, якість кривих.*

Постановка проблеми. Впровадження в різних галузях промисловості більш гнучких композитних матеріалів вимагають використання методів моделювання що дозволяють враховувати великі деформаційні переміщення, тобто вимагають аналізу в ГН постановці. Наприклад, в Архітектурної геометрії все більший інтерес викликає проектування і дослідження геометричних форм активно вигнутих конструкцій та якість їх кривих.

Для більшості методів розрахунку ГН балок так чи інакше характерне явище блокування (локінга) особливо коли використовуються дуже тонкі балки. Також збіжність цих методів сильно залежить від вибору початкової геометрії. Тому існує потреба в підходах позбавлених цих недоліків.

Відмітимо, що задачі нелінійної теорії балок, та теорії сплайнів доповнюють одна одну та мають спільний фундамент – теорію еластичності. Спільнота Механічної інженерії та спільнота Комп'ютерної графіки часто працюють над подібними проблемами і доповнюють одна одну [1]. В цьому плані, особливий інтерес для порівняння має проведення кривих (еластичності, сплайнів, геометрично нелінійної балки), яке визначається двома кінцевими точками з дотичним обмеженням, визначеним у кожній точці. Подібні задачі розглядаються в даній роботі.

Аналіз останніх досліджень. В сучасній літературі для моделювання ГН балок одним з найбільш популярних є коротаційний підхід [2, 3]. В ньому конфігурація балки представлена у вигляді суми двох компонентів: прямолінійного положення елементів системи і чистого деформаційного зміщення точок, а нелінійність враховується за допомогою матриці повороту між елементами. Для нього характерні описані вище проблеми. Зважаючи на них, в літературі з'являються спроби об'єднати балкові моделі з сплайнами [4, 5].

Для сучасних криволінійних сплайнів використовуються неявні представлення в вигляді $f(x, y) = 0$ та параметричні представлення в формі $y = f(t)$ та $x = g(t)$, де t є додатковим параметром [6]. Зараз все ще дуже популярними є сплайни на основі кривих Безьє - B-сплайни та NURBS [6], незважаючи на поширення інших видів кривих, наприклад [7,8].

Основна частина. Для оцінки якості отриманих кривих скористаємося критерієм енергії деформації E що базується на аналогії з теорії пружної балки і задається виразом [9]:

$$E = \int_0^L \kappa^2(l) dl \quad (1)$$

де κ є кривизною, l це елемент довжини та L повна довжина балки. Тому, крива вважається найкращою, якщо вона забезпечує мінімум енергії деформації E . В системах автоматизованого проектування (CAD) цей інтеграл по квадрату кривизни став однією зі стандартних мір добротності плоских кривих.

В статті [10] детально описано метод методу базових та згладжувальних рішень що використовується в даній роботі для моделювання ГН балок. Цей метод є розширеним коротаційним підходом, де базова геометрія є частиною кола і вже містить вбудовану деформацію (базове рішення), яке доповнюється згладжувальним рішенням, отриманим шляхом інтегрування лінійної системи постановочних диференціальних рівнянь, записаних в криволінійних (полярних) координатах. Базове рішення враховує геометрично нелінійну поведінку системи та містить розриви між елементами, які ліквідуються згладжувальним рішенням.

Таким чином, за рахунок розривів між елементами базового рішення метод не залежить від вибору початкової геометрії і в ньому відсутнє явище блокування (локінгу). Також даний підхід потребує на порядки меншу кількість ітерацій та в рази меншу кількість необхідних розрахункових елементів.

Побудова коротаційних балкових сплайнів (КБС) [11] проводиться в ітераційному процесі, де спочатку проводиться з'єднання реальних точок, розрахунок положення всіх проміжних точок, і поступовому додаванні уявних точок, призначення яких полягає в зменшенні кута розбіжності і наближення довжини побудованої кривої до набору довжин прямолінійних відрізків між точками. Такі сплайни базуються на коротаційних елементах, що межують під кутом один до одного.

Також порівнюємо результати з чотириточковим сплайном Безьє [6].

Переходим до розгляду прикладів розрахунків

Приклад 1. Перша точка B_1 має координати $(X = 0, Y = 0)$, кінцева точка B_2 має координати $(X = 150, Y = 0)$, дотична в точці B_1 спрямована вертикально, тобто кут (за годинниковою стрілкою) з горизонтальною віссю дорівнює -90° , і в точці B_2 кут дорівнює 90° . Фактично, це відома задача Хорна [12], яка продемонструвала, що мінімізація енергії не завжди є рішенням для найкращої кривої, і зрештою призвела до появи інших критеріїв, скажімо, мінімізації квадрата похідної від кривини

Очевидно, що найкращою кривою є півколо діаметром 150 м і довжиною $L_0 = \pi \cdot \frac{150}{2} = 235,62$ м. Відповідно до ф-мули (1) маємо енергію $E_0 = \left(\frac{2}{150}\right)^2 \cdot \frac{\pi 150}{2} \approx 0.041888$ відносно якої оцінимо якість. Розглянемо деякі розраховані криві. На Рис. 1 зображені криві отримані різними підходами.

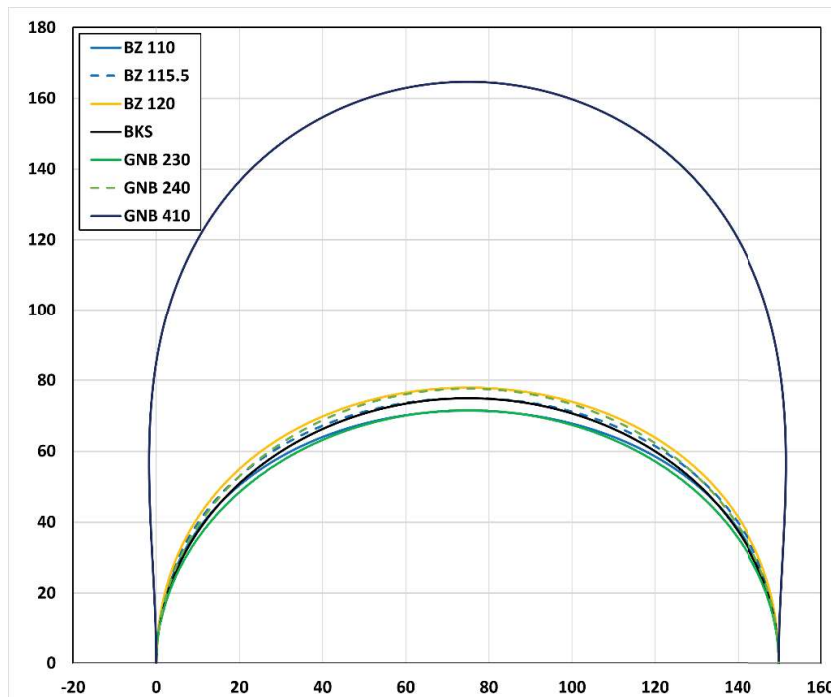


Рис.1. Кілька розрахованих сплайнів за методом Безьє (4 точки), КБС та ГНБ.

Графіки з позначенням BZ відносяться до сплайнів Безьє з заданими допоміжними точками на вказаній відстані від крайніх (110м, 115.5 м, 120 м) по дотичних. Конфігурація ГН балки GNB залежить від її заданої довжини (230 м, 240 м, 410 м). КБС дає лише одну можливу конфігурацію. В Таблиці 1 представлені розраховані значення якості по (1) та відносні значення до E_0

Таблиця 1. Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 1.

Тип кривої	BZ 110	BZ 115.5	BZ 120	КБС	GNB 230	GNB 240	GNB 410
Якість	0.0430 5	0.0419 0	0.0411 3	0.0419 0	0.04302 4	0.04118 1	0.03792 7
Відносна якість	1.0277 4	1.0003	0.9818	1.0003	1.04475	0.98312	0.90544

На рисунку 2 зображено графіки кривизни для всіх розглянутих сплайнів

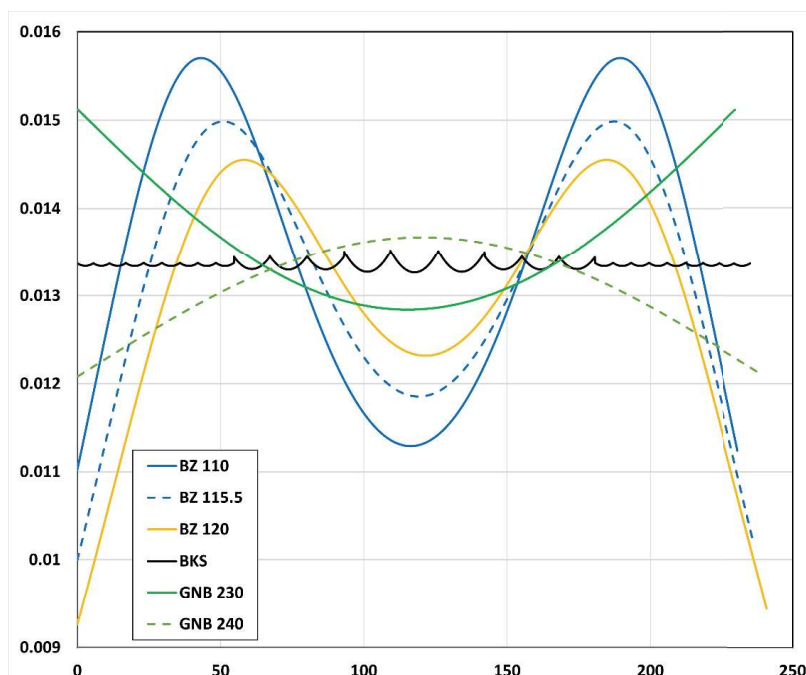


Рис.2. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами для завдання 1

Проаналізувавши значення кривизни можна зробити наступні висновки:

1. КБС дає результат як у ідеального кола. Хвилеподібність графіка є відображенням недостатньої кількості уявних точок.
2. Сплайни Безьє дають помітне відхилення від ідеального кола для всіх параметрів оптимізації.
3. У випадку, коли задана довжина ГН балок збігається з довжиною ідеального кола, вона фактично дає це ідеальне коло.

Приклад 2. Антисиметрична геометрія. Точка B_1 має координати ($X = 0, Y = 0$), кінець B_2 має ($X = 150, Y = 150$), дотична в точці B_1 спрямована під кутом 60° , поки в точці B_2 кут також дорівнює 60° . Отримані криві зображено на Рис.3. Принципи позначень ті ж самі що для Прикладу 1. В Таблиці 2 представлені розраховані значення якості по (1), а на Рис.3 графіки кривизн.

Таблиця 2. Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 2.

Крива	BZ 120	BZ 150	BZ 180	КБС	GNB 280	GNB 294	GNB 310
Якість	0.2080	0.2092	0.2173	0.1286	0.1373	0.1284	0.1225

Для графіків кривих Безьє вибрані такі довжини бо якщо взяти відстань до допоміжних точок дуже малою – вона буде нагадувати пряму лінію між двома кінцевими точками; великою - графік буде розміщено далеко за межами вертикального діапазону

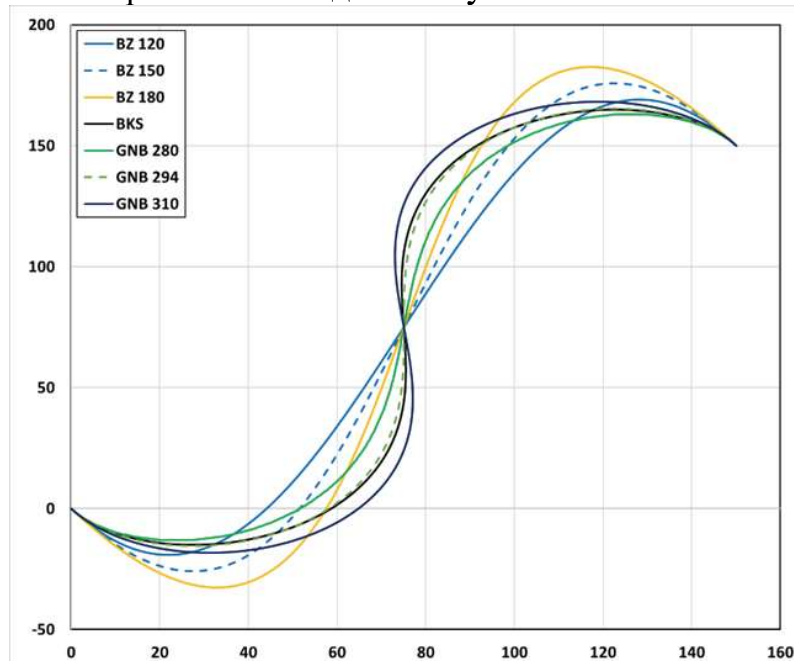


Рис. 3. Кілька розрахованих сплайнів за методом Безьє, КБС та ГНБ, завдання 2.

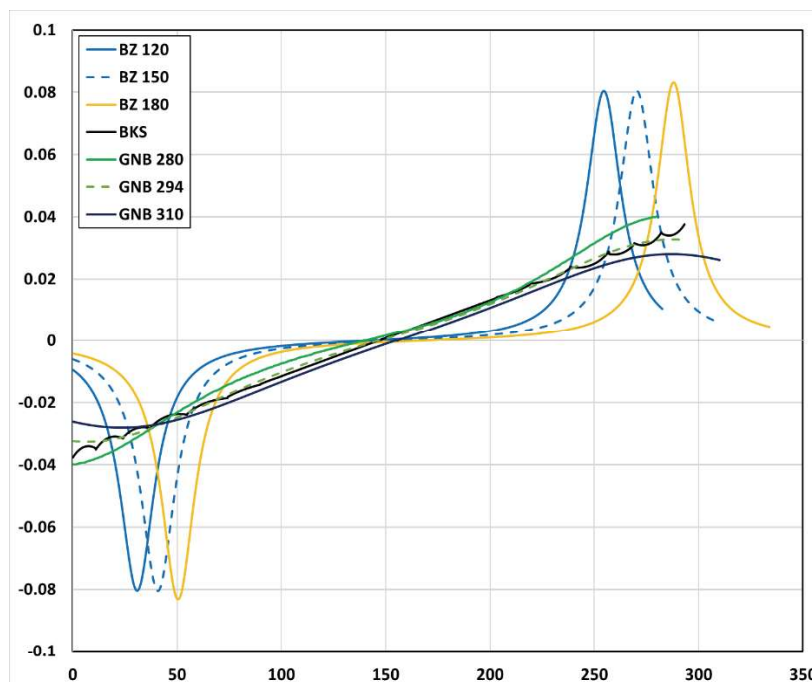


Рис.4. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами для завдання 2

Велика різниця в енергії може свідчити про деякі притаманні недоліки сплайнів Безьє для подібних прикладів. Що стосується ГН балок, результати для них близькі до КБС, оскільки їх довжини подібні. Змінюючи довжину ГН балки, якість її кривої може бути кращою, ніж у КБС.

Висновки. В роботі проведено порівняння застосування сплайнів Безьє, коротаційних балкових сплайнів та геометрично нелінійних балок для задач геометричного моделювання (побудова сплайнів).

Продемонстровано, що сплайн Безьє поступається в якості перед двома іншими для деяких конфігурацій обмежень у крайніх точках кривих.

Кортаційний балковий сплайн для всіх випадків показав хороші результати. У всіх випадках розрахована кривизна є або постійною (симетричні випадки), або лінійно змінюється з координатою довжини сплайна. Єдиною вимогою до його використання є необхідність великої кількості уявних точок.

Геометрично-нелінійні балки продемонстрували ефективність застосування при побудові сплайнів, проте певним недоліком можна назвати те, що для використання їх довжина повинна бути обрана заздалегідь.

Бібліографічний список

1. Romero, V., Ly, M., Rasheed, A. H., Charrondière, R., Lazarus, A., Neukirch, S., & Bertails-Descoubes, F. (2021). Physical validation of simulators in Computer Graphics: A new framework dedicated to slender elastic structures and frictional contact. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4), 1-19. <https://doi.org/10.1145/3450626.3459931>
2. Argyris, J. H., Balmer, H., Doltsinis, J. S., Dunne, P. C., Haase, M., Kleiber, M., ... & Scharpf, D. W. (1979). Finite element method—the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17, 1-106. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90083-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90083-5)
3. M.A. Crisfield, A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 81 (1990) 131–150. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90106-V](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90106-V)
4. Abdelfettah, S. Nurbs-based Timoshenko formulation of a geometrically nonlinear planar beam. *J Eng Math* 146, 12 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10665-024-10362-2>
5. Ranjan, Rakesh & Reddy, J. (2016). Non Uniform Rational Bspline (NURBS) based non-linear analysis of straight beams with mixed formulations. *Journal of Solid Mechanics*. 8.
6. Rogers, D. F. (2001). *An introduction to NURBS: with historical perspective*. Morgan Kaufmann.

7. Ravankar, A., Ravankar, A. A., Kobayashi, Y., Hoshino, Y., & Peng, C. C. (2018). Path smoothing techniques in robot navigation: State-of-the-art, current and future challenges. *Sensors*, 18(9), 3170. <https://doi.org/10.3390/s18093170>
8. Binninger, A., & Sorkine-Hornung, O. (2022, August). Smooth Interpolating Curves with Local Control and Monotone Alternating Curvature. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 41, No. 5, pp. 25-38). <https://doi.org/10.1111/cgf.14600>
9. Holladay, J. C. (1957). A smoothest curve approximation. *Mathematical tables and other aids to computation*, 11(60), 233-243.
10. Orynyak I., Mazuryk R., Oryniak A. (2020). Basic (Discontinuous) and Smoothing-Up (Conjugated) Solutions in Transfer-Matrix Method for Static Geometrically Nonlinear Beam and Cable in Plane. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 146, Issue 5 [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001753](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001753)
11. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. *System research and information technologies*. 2022, N4. doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10.
12. Horn, B. K. (1983). The curve of least energy. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 9(4), 441-460.