УДК 514.18

# ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ АРКИ, ФОРМА ЯКОЇ НАБЛИЖЕНА ДО ЛАНЦЮГОВОЇ ЛІНІЇ

Колган А.В., асистент
kolhan.av@knuba.edu.ua ORCID: 0000-0002-2167-2864

***Анотація -*** *У роботі розглянуто побудову геометричної моделі арки, форма якої представлена ланцюговою лінією. Для розрахунку форми кривої лінії у роботі використовується статико-геометричний метод (СГМ) професора Ковальова С.М.*

***Ключові слова****: статико-геометричний метод (СГМ); геометричне моделювання; ланцюгова лінія.*

**Постановка проблеми.** Існує багато різних форм кривих ліній, за допомогою яких можна описати ту або іншу форму арок. Загально відомо, що найоптимальнішою формою арки є парабола. Цікавою є задача побудови лінії-контуру арки, яка за формою наближена до ланцюгової лінії.

**Аналіз останніх досліджень.** Ланцюговою лінією називають криву, форму якої під дією власної ваги приймає однорідна гнучка нерозтяжна нитка з закріпленими кінцями [1].

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{1}$$

де $a$ - відношення сили натяжіння нитки до її лінійної щільності.

Перевернута ланцюгова лінія є ідеальною формою для арки з погляду міцності. Матеріал однорідної арки з однаковою лінійною щільністю у формі перевернутої ланцюгової лінії не відчуває напруги вигину, а лише механічну напругу стиснення [2]. Ці властивості використав іспанський архітектор Антоніо Гауді при проєктуванні храму Святого Сімейства (кат. Temple Expiatori de la Sagrada Família) (рис. 1 *а*, *б*). Гауді зробив підвісну ланцюгову модель собору для експериментального прорахунку форми арок та склепінь. Таким чином він змоделював весь силовий каркас майбутньої будівлі без математичних розрахунків (рис. 1, *в*) [3].

*а* *б* *в*

Рис.1 Храму Святого Сімейства (Sagrada Família) у Барселоні
а) фасад, б) інтер'єр, в) ланцюгова модель собору

Рівняння ланцюгової лінії (1) має складну математичну форму з гіперболічним косинусом. Параметр $a$ визначає кінцеву форму цієї кривої та залежить від трьох вільних параметрів (один - стріла підйому арки і два - положення (координати) закріплених кінців арки). Тому для однозначного визначення кривої потрібно щонайменше три точки. Однак система трьох рівнянь, яка виникає при підстановці координат "закріплених" вузлів і ординати нижньої точки ланцюга у рівняння (1), є нелінійною і виявляється складною для розв'язання. Тому, у дослідженнях [2, 4, 5] за наближену форму провисаючої лінії приймають параболу:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{2}$$

де $a_0$ ,$a_1$ , $a_2$ коефіцієнти параболи.

**Постановка задачі.** Розв'язати практичну задачу побудови лінії контуру архітектурної арки, розробити геометричну модель такої арки методами прикладної геометрії, спираючись на запропонований [2] алгоритм побудови ланцюгової лінії.

**Основна частина.** Нехай (рис. 2) перевернуту ланцюгову лінію задано точками її кінців $A(x_A,y_A)$ і $B(x_B,y_B)$. Задано висоту стріли підйому арки $h$ - точкою $S(x_S,h)$. Цю точку задати остаточно неможливо, бо повноцінне задання вершини вимагає виконання умови дотику кривої лінії до дотичної $y=h$. На початку розрахунків точка $S$ буде вершиною параболи та матиме наступні координати ($-a_1/2a_2$, $h$). Координату $x$ для цієї точки, можна знайти за умовою екстремуму, прирівнявши до нуля першу похідну від функції (1).

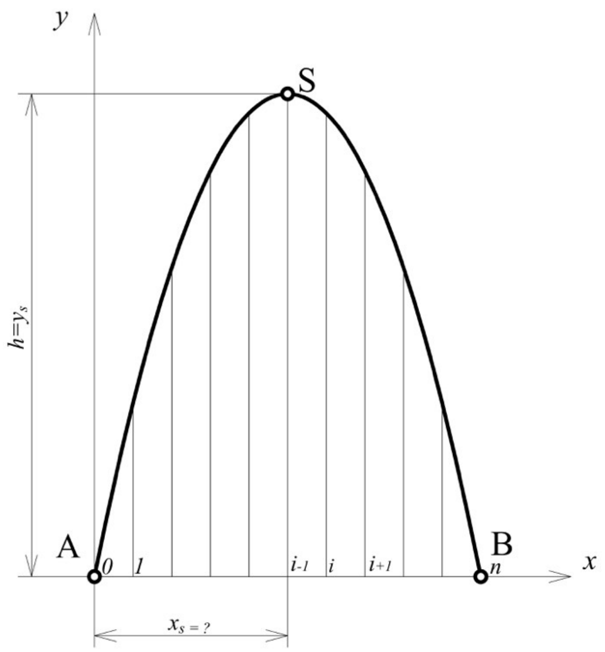


Рис. 2. Умова задачі

Для наочності побудов та розв’язання поставленої задачі використовується один з найбільш розвинутих і науково-обґрунтованих методів дискретного моделювання статико-геометричний метод проф. Ковальова С. М. [4]. В основі цього методу лежить рівновага вузлів дискретно представлено моделі кривої лінії. Для забезпечення рівноваги вузлів до кожного вузла необхідно прикласти зовнішнє формоутворююче навантаження. Для знаходження координат вузлів необхідно скласти систему рівнянь їх рівноваги. За результатами розв'язання такої системи можна отримати дискретний аналог параболи. СГМ дозволяє змоделювати й дискретний аналог ланцюгової лінії. Для цього до кожного з вузлів кривої лінії слід прикласти формоутворююче навантаження, яке може бути розраховане за формулою (3):

$$kP_i = \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2} + \sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \tag{3}$$

де $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

За рахунок того, що вздовж осі OX крок обирається постійний $x = const = 1$ , маємо $\Delta x = 1$ .

Нижче представлено алгоритм побудови дискретно-заданої ланцюгової лінії за СГМ. Розрахунок здійснюється в ітераційний спосіб.

1. За перше наближення обираємо дискретно представлену параболу, ординати вузлів якої визначаються за рівнянням (4):

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_i = 0 \tag{4}$$

Значення зовнішнього навантаження $P_i$, прикладеного до кожного з вузлів каркаса мають бути пропорційними довжинам ланок, що примикають до $i$-тої вершини.

Враховуючи, що *x=const=1*, маємо значення коефіцієнтів $k_i$ в усіх ланках:

$$k_{i,i+1} = \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{2 - 1} = 1 \tag{5}$$

Результати першого етапу розрахунку занесено у Таблицю 1. Закріплюється значення ординати найвищого вузла *S*.

2. За формулою (3) обчислюються значення навантаження $P_i$ для кожного з вузлів кривої:

$$P_i = \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + 1} + \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + 1}.$$

3. Складається та розв'язується система рівнянь рівноваги вузлів (4) з урахуванням отриманих на попередньому етапі $P_i$ . Знаходяться ординати вузлів дискретної ланцюгової лінії другого наближення та заносяться у таблицю 2.

Отриманий результат є проміжним для подальшого знаходження координат вузлів дискретно визначеної ланцюгової лінії та її побудови.

4. Для отримання остаточного результату порівнюються координати поточного і попереднього наближення з допустимою похибкою$\sigma_{доп} = y_{i+1} - y_1 = \pm 0.001$.

5. Якщо похибка не відповідає допустимій, розрахунок повторюється з пункту 2 по 4. Ітераційний процес зупиняєтеся при досягненні встановленого значення $\sigma_{доп}$ .

На рис. 3 представлено дискретні каркаси ланцюгових ліній. Ітераційний процес було завершено на шостій ітерації при досягненні мінімальної похибки $\sigma_{доп} = \pm 0.001$. Результати обчислень наведено в табл. 1 та табл. 2.

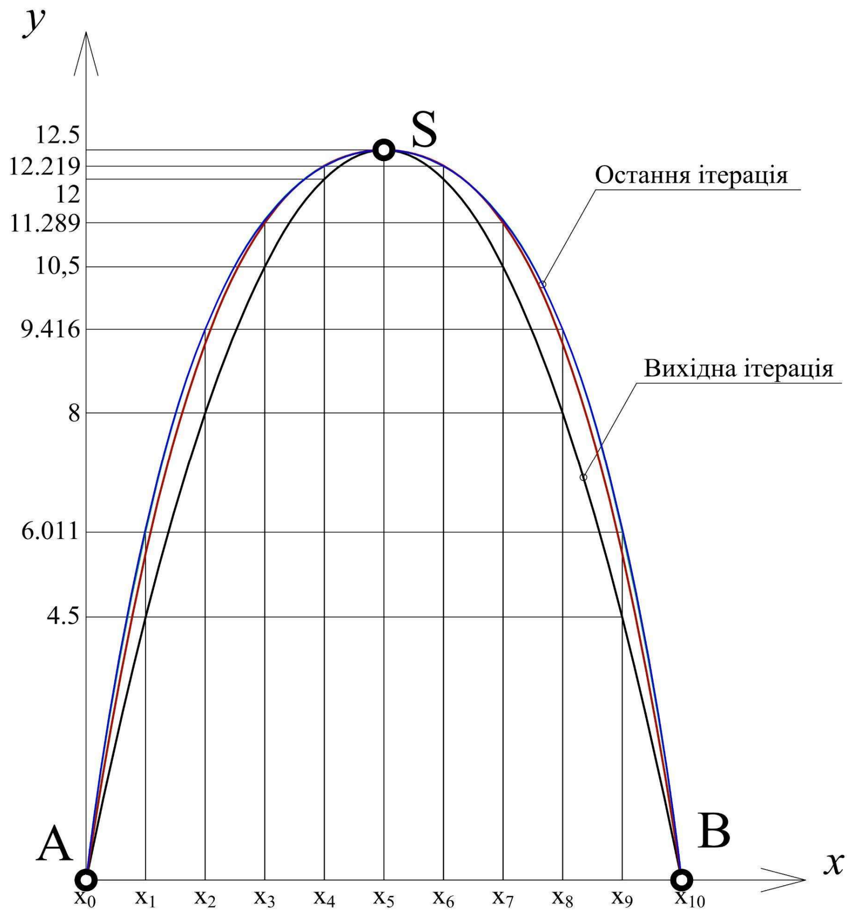


Рис. 3. Дискретний каркас ланцюгової лінії

Таблиця 1

| № Ітерації | Зовнішнє навантаження | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | k |
| 0 | 8.250 | 6.333 | 4.495 | 2.921 | 2.236 | 2.921 | 4.495 | 6.333 | 8.250 | |
| 1 | 9.413 | 6.027 | 3.706 | 2.443 | 2.062 | 2.443 | 3.706 | 6.027 | 9.413 | -0.242 |
| 2 | 9.650 | 5.753 | 3.492 | 2.391 | 2.072 | 2.391 | 3.492 | 5.753 | 9.650 | -0.263 |
| 3 | 9.658 | 5.675 | 3.478 | 2.400 | 2.076 | 2.400 | 3.478 | 5.675 | 9.658 | -0.270 |
| 4 | 9.646 | 5.668 | 3.486 | 2.404 | 2.077 | 2.404 | 3.486 | 5.668 | 9.646 | -0.270 |
| 5 | 9.642 | 5.671 | 3.489 | 2.404 | 2.077 | 2.404 | 3.489 | 5.671 | 9.642 | -0.270 |
| 6 | 9.642 | 5.672 | 3.489 | 2.404 | 2.077 | 2.404 | 3.489 | 5.672 | 9.642 | -0.270 |

Таблиця 2

| № Ітерації | Ординати вузлів | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_0$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ | $Y_8$ | $Y_9$ | $Y_{10}$ |
| 0 | 0 | 4.5 | 8 | 10.5 | 12 | 12.5 | 12 | 10.5 | 8 | 4.5 | 0 |
| 1 | 0 | 5.592 | 9.188 | 11.25 | 12.23 | 12.5 | 12.23 | 11.25 | 9.188 | 5.592 | 0 |
| 2 | 0 | 5.951 | 9.426 | 11.31 | 12.22 | 12.5 | 12.229 | 11.31 | 9.426 | 5.951 | 0 |
| 3 | 0 | 6.017 | 9.432 | 11.29 | 12.22 | 12.5 | 2.21 | 11.29 | 9.432 | 6.017 | 0 |
| 4 | 0 | 6.016 | 9.420 | 11.29 | 12.21 | 12.5 | 12.219 | 11.29 | 9.420 | 6.016 | 0 |
| 5 | 0 | 6.012 | 9.416 | 11.28 | 12.21 | 12.5 | 12.219 | 11.28 | 9.416 | 6.012 | 0 |
| 6 | 0 | 6.011 | 9.416 | 11.28 | 12.21 | 12.5 | 12.219 | 11.28 | 9.416 | 6.011 | 0 |

**Висновки.** Представлений підхід демонструє можливість використання статико-геометричного методу проф. Ковальова С.М. для побудови дискретної моделі контуру архітектурної арки. При цьому, форма дискретних кривих обирається наближеною до ланцюгових ліній. Представлені результати підтверджують спроможність СГМ і можливість його використання серед дизайнерів та архітекторів для створення геометричних моделей оптимальних за міцністю аркових конструкцій в архітектурі та містобудуванні.

## Література


1. Савелов А.А. Плоскі криві. Систематика, властивості, застосування/ під редакцією А.П. Нордена. – М.: 1960., – 289с.

2. Мостовенко О.В. Анпілогова В.О. Дискретна модель ланцюгової лінії. Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2016. - №92. - С.10-14.

3. Zerbst Rainer. Antoni Gaudi - Taschen America Llc. 1999 - 240 p. ISBN: 9783822870778 (ISBN10: 3822870773)

4. Ковальов С.М. Формування дискретних моделей поверхонь просторових архітектурних конструкцій: дис. доктора техн. наук: / С. М. Ковальов. − М., 1986. – 348 с.

5. Мостовенко О.В. Ковальов С.М. Мостовенко О.В. Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії. Збірник тез доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції. Обуховські читання. - Київ, 2024. - С.14-18.