УДК 623.54

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІНИ ХАРАКТЕРНОЇ ПЛОЩІ ПРОЄКЦІЙ ЕЛІПСОЇДНИХ ПОВЕРХОНЬ У ЗАДАЧАХ ЗОВНІШНЬОЇ БАЛІСТИКИ

Котляр Д.В. к.т.н., доцент без вченого звання
yardnight@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1718-753X
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова (м. Миколаїв, Україна)

Анотація *– Представлено результати дослідження зміни характерної площі проєкції еліпсоїдного тіла, що формує носову частину кулі під час польоту по балістичній траєкторії. Досліджено ряд еліптичних поверхонь з різними коефіцієнтами співвідношення півосей, які відповідають геометричним параметрам носових частин еталонних куль G1 та G7. Особлива увага приділяється впливу різних коефіцієнтів співвідношення півосей еліптичних поверхонь на зміну характерної площі та їх взаємозв'язок з аеродинамічним опором. Метою роботи є розробка аналітичних моделей для визначення зміни характерної площі нормальних проєкцій еліпсоїдних поверхонь, які можна використовувати для оптимізації аеродинамічних форм куль. Предметом дослідження є зміна характерної площі нормальних проєкцій еліпсоїдних поверхонь вздовж балістичної траєкторії руху.*

Ключові слова: *балістичний коефіцієнт, траєкторія балістична, характерна площа, сила опору потоку, кут атаки, нормальна площина.*

Постановка проблеми. Відомо, що кінцевою задачею зовнішньої балістики є виявлення балістичного коефіцієнту, який допомагає стрільцям прогнозувати поведінку кулі на різних відстанях та налаштовувати приціли для підвищення точності стрільби. Застосування балістичних калькуляторів спрощує цей процес, дозволяючи швидко і точно налаштувати приціл під конкретні умови стрільби. Під терміном балістичний калькулятор мається на увазі математичний апарат, що дозволяє прорахувати рух кулі та визначити її балістичну траєкторію на задану прицільну дистанцію за вхідними параметрами зовнішньої балістики, такими як: маса кулі, калібр, швидкість у дульному зрізі та інші[1]. Після пострілу, вилітаючи з нарізного ствола, куля отримує кутову швидкість для стабілізації завдяки гіроскопічному ефекту. Це призводить до появи кутів атаки аеродинамічного опору на її балістичній траєкторії. Гіроскопічна стабілізація тримає кут вектору нахилу кулі вздовж всієї траєкторії польоту, але, з іншого боку, є причиною девіації кутів атаки аеродинамічного опору. Оскільки кут атаки аеродинамічного опору кулі змінюється під час її руху

по балістичній траєкторії, варто розглянути геометричні аспекти цього руху. Це допоможе врахувати їх вплив у аналітичній моделі балістичного калькулятора і точніше визначити коефіцієнт опору кулі, який є ключовим для розрахунку балістичного коефіцієнта. [2].

Аналіз останніх досліджень. Відомо, що коефіцієнт опору кулі (C_d) визначає, наскільки сильно повітря впливає на кулю під час польоту. Оскільки політ кулі є дуже динамічним процесом, коефіцієнт опору змінюється в залежності від швидкості та форми кулі. Його визначення є складним завданням, яке вимагає врахування багатьох фізичних аспектів взаємодії кулі з повітрям.

У формулі (1) подається аналітичний вираз для визначення коефіцієнту аеродинамічного опору C_d [1,7]:

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho v^2 \cdot A}, \qquad (1)$$

де F_d – сила опору, ρ – щільність повітря, v – швидкість кулі (швидкість взаємодії кулі з потоком), A – характерна площа кулі (площина поперечного перерізу нормального до напрямку руху).

При виборі аеродинамічної форми кулі слід враховувати, що зі зменшенням опору тиску збільшується сила тертя. Це пов'язано з тим, що видовження форми кулі зменшує опір, але одночасно збільшує площу її поверхні[3]. Розглянемо формулу визначення сили аеродинамічного опору (2).

$$F_d = \int_A (-P\cos\theta + \tau_w \sin\theta) dA, \qquad (2)$$

де P – напруга, викликана тиском від опору форми; τ_w – опір від сили тертя викликаний напругами зсуву. Варто зазначити, що при визначенні компоненти сили опору форми враховують площу характерного перерізу, а при визначенні компоненти сили тертя – площу поверхні кулі, яка взаємодіє з повітрям і розщеплює його шари. У задачах зовнішньої балістики, зокрема при визначенні сили опору, основну увагу приділяють компоненті опору від форми, оскільки її вплив значно перевищує вплив сили тертя [7]. Цьому сприяють геометричні аспекти польоту куль по балістичній траєкторії, врахувавши які можна уточнити математичний апарат оптимізації аеродинамічної форми.

У даній роботі, предметом дослідження є зміна характерної площі кулеподібних геометричних форм, що описують носову частину кулі як еліпсоїдальну поверхню, вздовж балістичної траєкторії.

Метою роботи є розробка аналітичних моделей зміни характерної площі проєкцій еліпсоїдних поверхонь на нормальну площину кривої лінії балістичної траєкторії, які можна використовувати для оптимізації аеродинамічних форм куль.

Основна частина. В даній роботі, у якості геометричного аспекту руху кулі на балістичній траєкторії прийнято зміну характерної площі кулі

в залежності від кута девіації сили опору γ. Під терміном характерної площі кулі будемо розуміти площу її обводу, яка утворюється проєкцією кулі на площину, що нормальна до кривої лінії траєкторії польоту. Зважаючи на складну форму кулі яку умовно можна розділити на три частини: носову, циліндричну та хвостову, у цій статті основна увага приділена, саме носовій частині.

З урахуванням вище зазначеного, у якості дослідної форми було взято фрагмент еліпсоїдної поверхні утворений обертанням чверті еліптичної кривої навколо більшої півосі. Дослідження проводилося з групою фрагментів еліпсоїдних поверхонь, що мають спільне значення величини малої півосі. За малу піввісь прийнято половину калібру кулі .338 (8,58мм). Довжину більшої півосі розраховано в залежності від коефіцієнтів еліптичності *k*, де максимальне значення дослідного діапазону значень *k* прийнято 0,111, що відповідає пропорції 1:9, яка достатньо точно відповідає формі носової частини кулі .338 Lapua Mag. SWISS P Target 19,4g / 300 gr. (еталонне співвідношення пропорцій кулі – *G*7[4]) див. рис. 1.

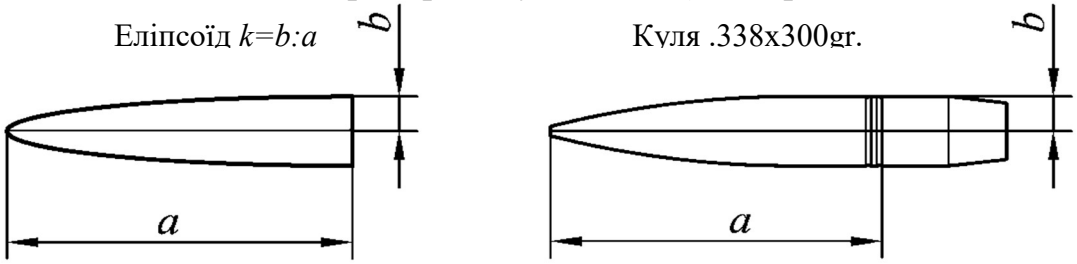

Рис. 1. Носова частина кулі

Мінімальним коефіцієнтом еліптичності приймаємо значення 0,166 (співвідношення півосей 1:6), що відповідає еталонному співвідношення пропорцій кулі – *G*1[4]. У таблиці 1 наведемо геометричні параметри побудови еліпсоїдних поверхонь.

Таблиця 1

Індекс форми *i*	Коефіцієнт еліптичності *k*	Калібр *2b,* мм	Довжина *a,* мм	Площа повздовжнього перерізу еліпсоїда A_i , мм^2
1	0,111 (1:9)	8,58	38,61	260,1762
2	0,125 (1:8)	8,58	34,32	231,2678
3	0,143 (1:7)	8,58	30,03	202,3593
4	0,154 (1:6,5)	8,58	27,89	187,9051
5	0,166 (1:6)	8,58	25,74	173,4508

Параметр *k* є керуючою змінною, за допомогою якої можна впливати на геометричну форму носової частини кулі, що доцільно використовувати у оптимізаційній задачі пошуку ефективної аеродинамічної форми.

Відомо, що аеродинамічна куля не повинна перевертатися на 360° на балістичній траєкторії. Поворот в 90° є можливим, але свідчить про не стабільний політ кулі [7]. Тому розглянемо девіацію кута атаки аеродинамічного опору γ підчас руху кулі по балістичній траєкторії в

діапазоні від 0°(коли вектор руху співпадає з вектором осі гіроскопічного обертання) до 90°(коли вектори зазначених осей перпендикулярні, тобто куля летить боком). Розрахуємо характерні площі проєкцій всіх п'яти еліпсоїдальних форм, з градієнтом зміни кута девіації 5° у зазначеному діапазоні.

На рис. 2 зображено графік зміни характерних площ від кута девіації в межах запропонованого діапазона. Проаналізувавши графік можна відмітити плавність зміни кривих для всіх досліджуваних форм еліпсоїдної поверхні.

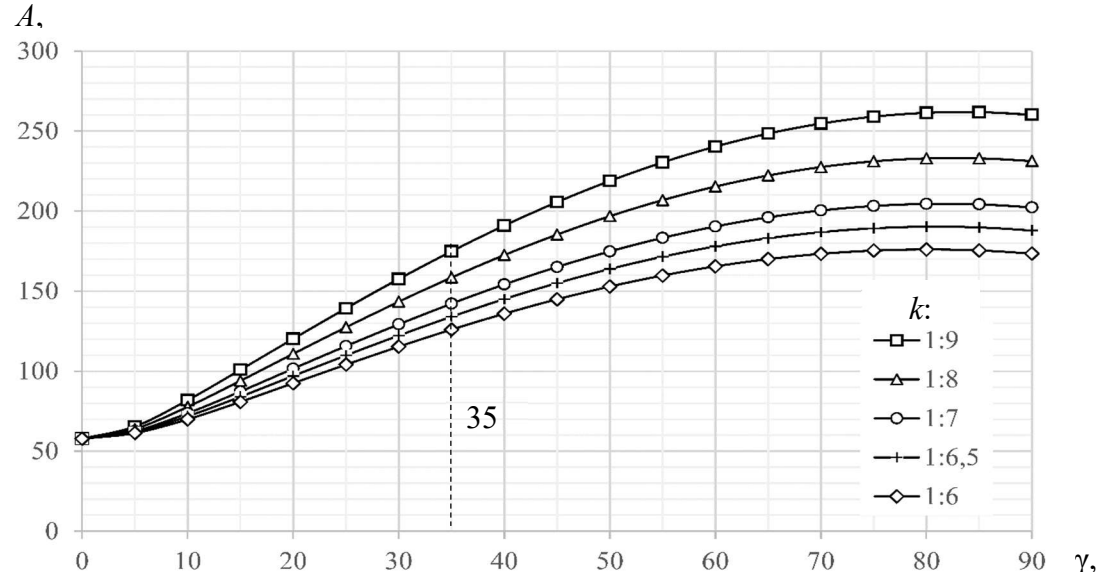

Рис. 2. Діаграма зміни характерної площі від кута девіації для еліпсоїдних форм відповідно до коефіцієнтів

Також явно виражено швидкий приріст площі при малих кутах девіації, які характерні на підйомній частині балістичної траєкторії [5]. Судячи з вигляду отриманого графіку можна зробити висновок про поліноміальний характер залежності, аналітичну форму якого потрібно уточнити провівши додаткове дослідження. В свою чергу треба відмітити зменшення характерної площі для всіх дослідних форм після кута девіації 80°, це імовірно пов'язано зі зниканням додаткової площі від колової кромки границі еліпсоїдної поверхні, яка утворилася половинним січним перерізом еліпсоїда при створені кулеподібної форми.

Дослідивши криволінійний руху кулі .338 Lapua Mag. SWISS P Target 19,4g / 300 gr. за діаграмою висот траєкторії на прицільну дальність 1400м, яка була надана виробником у відповідних специфікаціях, можна розрахувати максимальний кут девіації аеродинамічного опору кулі в 35°[4]. Тобто для вирішення прикладних задач зовнішньої балістики доцільно обмежити діапазон кутів девіації в інтервалі від 0 до 35° для конкретної балістичної траєкторії. З урахуванням вище наведеного, характер аналітичної моделі графів на рис. 2 можна описати як кубічну залежність характерної площі від кута девіації. Така кубічна поліноміальна залежність достатньо точно описує криві, а рівномірний інтервал їх взаємного розміщення дозволяє

сформувати універсальну аналітичну модель для еліпсоїдних форм з різними коефіцієнтами еліптичності (3).

$$A^m\ (\gamma,k) = f_3(k)\gamma^3 + f_2(k)\gamma^2 + f_1(k)\gamma\ +\ \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (3)$$

де d – калібр кулі, мм; k – коефіцієнт еліптичності; $f_{1..3}(k)$ – поліноміальні коефіцієнти, що розраховуються як функції коефіцієнту еліптичності; γ – кут сили опору в цільовій точці траєкторії.

Щоб відслідкувати прискорення зміни площі побудуємо графік залежності інтегрального коефіцієнт зміни характерної площі еліпсоїдної поверхні S_i, від дискретного коефіцієнту зміни характерної площі R_i (рис. 3).

Треба відзначити, що, інтегральний коефіцієнт росту площі S_i розраховується як відношення характерної площі при цільовому куті девіації до початкової характерної площі при відсутності кута девіації, а дискретний проміжний коефіцієнти росту R_i розраховуються, як відношення двох суміжних значень характерних площ (4).

$$R_i = \frac{A_i(\gamma_n)}{A_i(\gamma_{n-1})}\ ;\ S_i = \frac{A_i(\gamma_n)}{A_i(\gamma_0)}\ , \qquad (4)$$

де i – індекс форми еліпсоїдної поверхні з відповідним k; n – порядковий номер дискретного кута девіації; γ_n – цільовий кут сили опору; γ_n – попередній n-ому суміжний дискретний кут сили опору; γ_0 – нульовий кут сили опору (кут атаки відсутній).

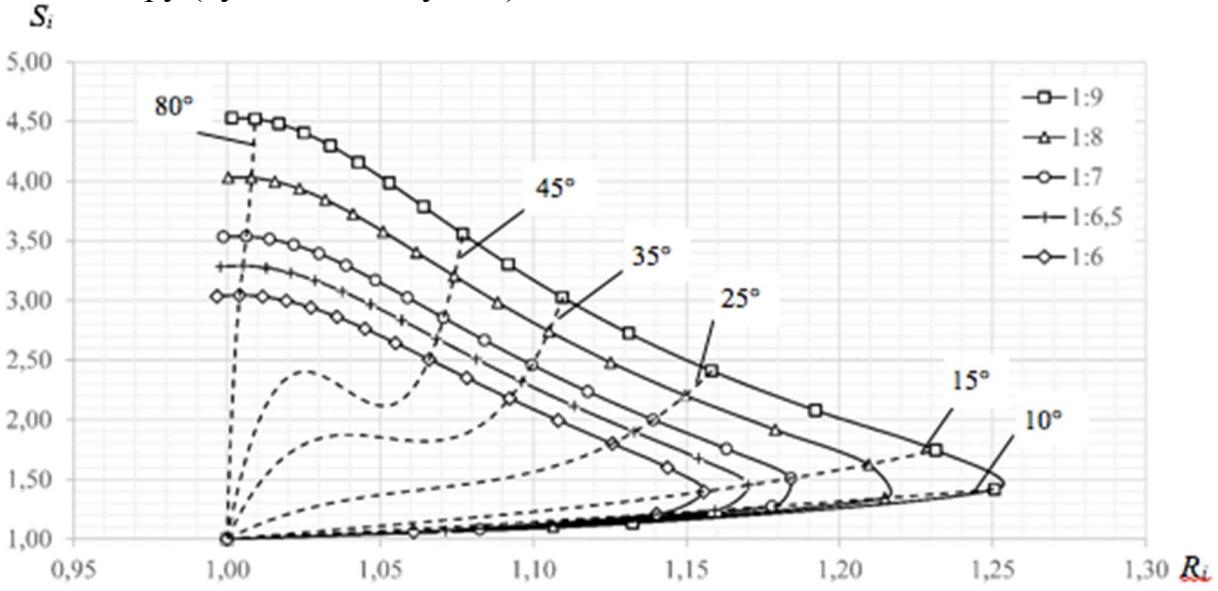

Рис. 3. Графік прискорення зміни характерної площі дослідних еліпсоїдних форм

Як видно з графіку на рис. 3 характерна площа поверхонь прискорено збільшується до кута атаки аеродинамічного опору в 10° у поверхонь з більшими коефіцієнтами еліптичності, та при куті 15° для форм з низьким k. Всі дослідні форми показали практично лінійну залежність прискорення

росту характерної площі від величини кута девіації сили опору до 10°. На графіку нанесено аналітично отримані ізолінії для кутів 10, 15, 25, 35, 45, 80 градусів.

Дослідивши характер кривизни ізоліній доцільно припустити їх поліноміальний характер залежності у дослідному діапазоні зміни *k*. Допускаючи випадок коли коефіцієнт еліптичності дорівнює 1 при якому ми одержимо сферичну форму носової частини кулі, можна прийти до логічного висновку, що всі ізолінії зійдуться в "початковій точці", коли R_i=1,0 та S_i=1,0. Це підтверджується тим, що характерна площа сферичної поверхні буде сталою в незалежності від кута атаки. Враховуючи цю додаткову "початкову точку" аналітичну модель ізоліній треба допустити такою, що може мати кубічну поліноміальну залежність для уточнення якої потрібно виконати додаткові дослідження з меншими значеннями коефіцієнту еліптичності ніж тими, що приймалися в цій роботі.

У таблиці 2 наведено результати розрахунків характерних площ A_i і коефіцієнтів росту площі R_i та S_i від кутів атаки аеродинамічного опору у цільовому діапазоні їх девіації.

Таблиця 2

k	Кут γ, градус	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
1:9	A_1, м^2	57,80	65,48	81,90	100,9	120,2	139,3	157,6	174,8	190,9	205,6
	R_1	1,000	1,133	1,251	1,231	1,192	1,158	1,131	1,110	1,092	1,077
	S_1	1,000	1,133	1,416	1,741	2,080	2,409	2,725	3,024	3,302	3,556
1:8	A_2, м^2	57,80	63,98	77,72	94,01	110,8	127,4	143,4	158,5	172,5	185,3
	R_2	1,000	1,107	1,215	1,210	1,179	1,150	1,125	1,105	1,088	1,074
	S_2	1,000	1,107	1,344	1,620	1,917	2,204	2,480	2,741	2,984	3,205
1:7	A_3, м^2	57,80	62,59	73,73	87,30	101,6	115,7	129,3	142,2	154,2	165,1
	R_3	1,000	1,083	1,178	1,180	1,16	1,139	1,118	1,100	1,084	1,071
	S_3	1,000	1,083	1,275	1,510	1,76	2,001	2,237	2,459	2,666	2,855
1:6,5	A_4, м^2	57,80	61,95	71,81	84,04	96,98	109,9	122,3	134,1	145,0	154,9
	R_4	1,000	1,071	1,159	1,170	1,154	1,133	1,113	1,096	1,081	1,069
	S_4	1,000	1,071	1,242	1,454	1,677	1,900	2,116	2,319	2,508	2,680
1:6	A_5, м^2	57,82	61,34	69,94	80,84	92,47	104,1	115,4	126,0	135,9	144,9
	R_5	1,000	1,06	1,14	1,156	1,144	1,126	1,108	1,092	1,078	1,066
	S_5	1,000	1,061	1,210	1,398	1,599	1,801	1,995	2,180	2,350	2,505

Висновки та перспективи. У дослідженні проаналізовано зміну характерної площі нормальних проєкцій еліпсоїдних поверхонь носової частини кулі вздовж її балістичної траєкторії.

Виявлено, що зміна площі залежить від кута атаки аеродинамічного опору, що підтверджується аналітичними моделями. З огляду на формулу (1) можна зробити висновок, що коефіцієнт опору (C_d), який є обернено-пропорційним до характерної площі кулі, може бути уточнений в кожній точці траєкторії польоту через кут вектору аеродинамічного опору за наведеною формулою (5).

$$C_d(\gamma,k) = \frac{Fd}{\frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot A^m(\gamma,k)}. \qquad (5)$$

Дослідження показало, що геометричні параметри носової частини кулі, зокрема коефіцієнт співвідношення півосей, значно впливають на аеродинамічні характеристики кулі. Отримані результати можуть бути використані для подальшого вдосконалення конструкцій куль.

Дослідивши інтегральний коефіцієнт росту характерної площі кулі встановлено, що в підйомній фазі польоту кулі характерна площа прискорено зростає в середньому у 1,4 рази.

Такий суттєвий приріс характерної площі на початковій ділянці траєкторії з надзвуковою швидкістю в 3Маха, значно впливає на силу опору кулі та, як результат, на її аеродинамічну ефективність та дальність польоту, що має бути враховано при визначені балістичного коефіцієнту. Поволі падіння швидкості кулі вздовж балістичної траєкторії, приріст характерної площі зменшується, а разом з цим і зменшується вплив зміни характерної площі на зміну коефіцієнту опору.

Математичні моделі розрахунку балістичного коефіцієнту, які використовують усереднене або сегментне значення коефіцієнту опору кулі, можуть бути уточнені запропонованою моделлю розрахунку коефіцієнту опору у кожній цільовій точці траєкторії, який можна виразити через функцію кута девіації сили пору та коефіцієнта еліптичності.

Такий підхід врахування геометричних аспектів кулі у кожній розрахунковій точці на балістичній траєкторії через запропоновані аналітичні моделі дозволить реалізувати апарат розрахунку коефіцієнту опору у програмах обчислювальної газодинаміки.

Планується дослідити вплив інших геометричних форм кулі, крім еліпсоїдних, на їхні аеродинамічні властивості з метою виявлення більш ефективних форм.

Бібліографічний список

1. Litz B., Applied Ballistics for Long Range Shooting. *Applied Ballistics, 3rd edition LLC.* 2015. 144p. ISBN 978-0-9909206-1-8.[in English]
2. Verma A., Kapil P., Sharma V. CFD Analysis of Different Shapes of Projectile. Dehradun: University of Petroleum & Energy Studies. 2011. April. 76 p. [in English]
3. Jang Y., Huh J., Lee N., Lee, S., Park Y. Comparative study on the prediction of aerodynamic characteristics of aircraft with turbulence models. Int. J. Aeronaut. Space Sci. 2018. Vol. 19. P. 13–23. [in English]
4. Beech D., Aerodynamic drag measurement and modeling for small arms – improving on ballistic coefficients. *Applied Ballistics the science of Accuracy*. 2019. P.1-5. [in English]
5. Nennstiel R., How do bullets fly. *AFTE Journal*. 1996.Vol. 28, No. 2, April. P. 104-143. [in English]
6. Litz B., Aerodynamic Drag Modeling for Ballistics, *Applied Ballistics the science of Accuracy*. 2021. P. 1-17. [in English]
7. Carlucci D.E., Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition. CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2007. P. 185-256 [in English]