

НЕПЕРЕРВНЕ ЗГИНАННЯ КАТЕНОЇДА РІВНОМІРНИМ РОЗТЯГУВАННЯМ ВЗДОВЖ ЙОГО ОСІ

Пилипака С.Ф., професор,
psf55@ukr.ua, ORCID 0000-0002-1496-4615

Несвідомін А.В., докторант¹

*Національний університет біоресурсів і природокористування України,
(Україна, м. Київ)*

***Анотація.** Згідно теореми Бура із курсу диференціальної геометрії кожену поверхню обертання можна зігнути у гвинтову і навпаки. Згинання гвинтової поверхні здійснюється поступовим зменшенням її кроку до нуля або ж розтягуванням поверхні обертання вздовж її осі, тобто збільшенням кроку від нуля до максимально можливої величини.*

Розглянуто згинання катеноїда у гвинтовий коноїд, який має широке застосування у техніці. Накладанність поверхні гвинтового коноїда на поверхню катеноїда є класичним прикладом згинання нерозгортних поверхонь. Вона означає можливість деформації початкової поверхні в кінцеву форму без розгляду проміжних положень. Неперервне згинання передбачає побудову однопараметричної множини проміжних положень.

***Ключові слова.** Гвинтовий коноїд, крок, перша квадратична форма, параметричні рівняння.*

Постановка проблеми. Поверхня гвинтового коноїда широко використовується при проектуванні гвинтових конвеєрів. Однак вона є нерозгортною, тому не існує точної плоскої заготовки, тобто розгортки, для виготовлення витка. В зв'язку із цим використовують наближену розгортку, яка б чинила найменший опір при деформуванні її у виток гвинтового коноїда. Його згинання у катеноїд дозволяє знайти наближену розгортку. Для цього катеноїд можна апроксимувати зрізаним конусом і точну розгортку зрізаного конуса прийняти за наближену розгортку гвинтового коноїда.

Аналіз останніх досліджень. Неперервне згинання розгортних поверхонь, в тому числі гвинтових, розглянуто у праці [1]. Конструювання витка прямого відкритого гелікоїда із плоскої заготовки розглянуто в праці [2]. В ній показано, що поверхнею обертання, на яку згинається прямий відкритий гелікоїд, є однопорожнинний гіперболоїд. Його теж рекомендується апроксимувати зрізаним конусом з подальшим

¹ Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

знаходженням його точної розгортки. Такий спільний підхід дає можливість порівняти отримані результати для подібних поверхонь.

Формулювання цілей. Описати математично процес неперервного згинання поверхні катеноїда у гвинтовий коноїд.

Основна частина. Якщо меридіан поверхні обертання описати явним рівнянням $z=f(\rho)$, то сама поверхня буде описана наступними параметричними рівняннями:

$$X = \rho \cos \alpha; \quad Y = \rho \sin \alpha; \quad Z = f(\rho), \quad (1)$$

де α і ρ – криволінійні координати поверхні, при цьому ρ – відстань від вертикальної осі обертання до точки на поверхні, α – кутова координата.

Перша квадратична форма поверхні (1) має наступний вигляд:

$$dS^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\rho + G d\rho^2, \quad (2)$$

де коефіцієнти E, F, G знаходять із наступних виразів:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right)^2; \quad F = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \rho} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \rho} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \rho}; \quad (3)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2.$$

Знайшовши вирази (3) для поверхні обертання (1), отримаємо наступну квадратичну форму:

$$dS^2 = [1 + f'^2(\rho)] d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2. \quad (4)$$

Відсутність у (4) середнього коефіцієнта F свідчить про те, що сітка із паралелей і меридіанів є прямокутною.

Тепер запишемо параметричні рівняння гвинтової поверхні, в яку ми хочемо зігнути поверхню обертання (1):

$$X = w \cos \alpha; \quad Y = w \sin \alpha; \quad Z = \varphi + h\alpha, \quad (5)$$

де α і w – незалежні змінні поверхні;

h – гвинтовий параметр, який є сталою величиною;

$\varphi = \varphi(w)$ – невідоме рівняння осьового перерізу гвинтової поверхні, яке потрібно розшукати.

Потрібно знайти таке рівняння $\varphi = \varphi(w)$, щоб при $h=0$ воно описувало таку ж криву, тобто меридіан, як і рівняння $f=f(\rho)$.

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (5) і сама форма згідно формул (3) і (2) набувають вигляду:

$$E = 1 + \varphi'^2; \quad F = h\varphi'; \quad G = w^2 + h^2. \quad (6)$$

$$dS^2 = (1 + \varphi'^2) dw^2 + 2h\varphi' dw d\alpha + (w^2 + h^2) d\alpha^2. \quad (7)$$

Із виразів (6) і (7) бачимо, що $F \neq 0$, тобто сітка координатних ліній є косокутною. Відомо, що при згинанні гвинтових поверхонь у поверхні обертання гвинтові лінії накладаються на паралелі, а їх ортогональні траєкторії – на меридіани. Таким чином, потрібно перейти до прямокутної сітки таких координатних ліній. Для такого переходу потрібно розв'язати диференціальне рівняння:

$$Fdw + Gd\alpha = 0. \quad (8)$$

Після підстановки в рівняння (8) виразів коефіцієнтів F і G із (6) одержимо:

$$\alpha = -h \int \frac{\varphi'}{w^2 + h^2} dw + t, \quad (9)$$

де t – стала інтегрування.

Сталій інтегрування t можна надавати різних числових значень. Їм відповідатимуть перпендикулярні лінії до гвинтових. Це означає, що сталу t можна взяти за нову незалежну змінну. Після цього запишемо:

$$d\alpha = dt - \frac{h\varphi'}{w^2 + h^2} dw. \quad (10)$$

Тепер підставимо вирази $d\alpha$ із (10) у (7) і після перетворень отримаємо:

$$dS^2 = \left(1 + \frac{w^2 \varphi'^2}{w^2 + h^2} \right) dw^2 + (w^2 + h^2) dt^2. \quad (11)$$

Як видно із (11), коефіцієнт F відсутній, що свідчить про ортогональність координатної сітки. Далі потрібно привести квадратичну форму (11) до вигляду (4). Це означає, що потрібно в (11) перейти від змінних w і t до змінних α і ρ так, щоб він залишився незмінним. Для цього спочатку прирівняємо праві частини при диференціалах dt^2 і $d\alpha^2$: $\rho^2 = w^2 + h^2$. Після цього отримаємо:

$$\rho = \sqrt{w^2 + h^2}; \quad d\rho = \frac{wdw}{\sqrt{w^2 + h^2}}. \quad (12)$$

Наступний крок – прирівнюємо ліві частини, взявши вираз диференціала $d\rho$ із (12):

$$\left(1 + f'^2 \right) \frac{w^2 dw^2}{w^2 + h^2} = \left(1 + \frac{w^2 \varphi'^2}{w^2 + h^2} \right) dw^2. \quad (13)$$

Розв'яжемо (13) відносно φ' і отримаємо:

$$\varphi' = \frac{\sqrt{w^2 f'^2 - h^2}}{w}, \quad (14)$$

де φ' – похідна рівняння кривої осьового перерізу гвинтової поверхні, яку потрібно знайти;

f' – похідна рівняння меридіана у поверхні обертання (1).

Далі потрібно підібрати таку криву меридіана $z=f(\rho)$, щоб можна було проінтегрувати вираз (14) і зробити відповідні подальші перетворення. За таку криву взяли ланцюгову лінію – переріз катеноїда:

$$f = a \operatorname{Arccosh}\left(\frac{\rho}{a}\right); \quad f' = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}. \quad (15)$$

В похідній (15) потрібно перейти до змінної w згідно (12):

$$f' = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{w^2 + h^2 - a^2}}. \quad (16)$$

Далі підставляємо (16) у (14):

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{\sqrt{w^2 f'^2 - h^2}}{w} = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{a^2 w^2}{w^2 + h^2 - a^2} - h^2}. \quad (17)$$

У виразі (17) повертаємося до змінної ρ . Згідно (12) запишемо:

$$w = \sqrt{\rho^2 - h^2}; \quad dw = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}}. \quad (18)$$

Після цього підставимо вирази (18) у (17) і після перетворень отримаємо:

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}}. \quad (19)$$

Знайдену похідну(17) підставляємо у (10) і після спрощень отримуємо:

$$d\alpha = dt - \frac{h}{w} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{(w^2 + h^2 - a^2)(w^2 + h^2)}} dw. \quad (20)$$

Після цього переходимо в (20) до змінної ρ . Підставляємо в (20) вирази (18) і після спрощень отримаємо:

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = dt - \frac{h}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}}. \quad (21)$$

Знайдені вирази (18), (19) і (21) підставляємо у рівняння гвинтової поверхні (5) і отримуємо наступні параметричні рівняння:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\rho^2 - h^2} \cos\left(t - h \int \frac{1}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}} d\rho\right); \\ Y &= \sqrt{\rho^2 - h^2} \sin\left(t - h \int \frac{1}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}} d\rho\right); \\ Z &= \int \frac{\rho^2}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}} d\rho - h^2 \int \frac{1}{\rho^2 - h^2} \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}} d\rho. \end{aligned} \quad (22)$$

Перша квадратична форму рівнянь (22) згідно (3) і (4) має наступний вигляд:

$$dS^2 = \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 - a^2} \right] d\rho^2 + \rho^2 dt^2. \quad (23)$$

При підстановці у (4) виразу похідної із (15) отримаємо першу квадратичну форму, аналогічну (23) за винятком змінних α і t . Однак це не має значення, бо позначення змінної іншим символом нічого не змінює. Для повної аналогії приймаємо $\alpha=t$.

Підінтегральні вирази у рівняннях (22) можна проінтегрувати. Після інтегрування і заміни символу « t » на символ « α » рівняння (22) набувають остаточного вигляду:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\rho^2 - h^2} \cos \left(\alpha - \text{Arctg} \frac{h}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - h^2}} \right); \\ Y &= \sqrt{\rho^2 - h^2} \sin \left(\alpha - \text{Arctg} \frac{h}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - h^2}} \right); \\ Z &= \sqrt{a^2 - h^2} \ln \left(\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2} \right) + h\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

У першу квадратичну форму (23) стала h не входить, хоча вона впливає на геометрію поверхні. Отже вона є параметром згинання. Якщо для h надати значення $h=0$, то рівняння (24) описують поверхню обертання – катеноїд (рис. 1, а). Стала a визначає радіус найменшої паралелі, отже, змінна ρ не може набувати значень менших за a . У процесі побудови поверхні вона змінювалася в межах $0,1-0,2$ м, що видно на рис. 1, а.

При деформації катеноїда у коноїд паралелі перетворюються на гвинтові лінії. Така деформація досягається поступовим збільшенням параметра h . За максимального значення $h=a$, найменша паралель із радіусом a витягується у пряму лінію, яка стає віссю гвинтового коноїда (рис. 1, б). Довжина цієї паралелі дорівнює $2\pi a$, що визначає крок гвинтового коноїда.

При заданому максимальному значенні $\rho=0,2$ м, на катеноїді паралель має радіус R_c (рис. 1, а), а на гвинтовому коноїді – гвинтова лінія розташована на циліндрі радіуса R_a (рис. 1, б).

Слід звернути увагу, що при максимальному значенні $h=a=0,1$ в рівняннях (24) виникає ділення на нуль. Щоб запобігти цьому, максимальне значення h було прийнято меншим, а саме $h=0,099$. Отримане при цьому зображення гвинтового коноїда (1, б) отримано точно, про що свідчить вісь коноїда, яка є прямою лінією. При інших значеннях параметра h , значно менших від максимального, відповідною лінією є гвинтова.

Якби потрібно було сформулювати один виток гвинтового коноїда, зображеного на рис. 1, б, з внутрішнім краєм, що збігається з віссю коноїда, то для деформації слід було б взяти катеноїд, представлений на рис. 1, а.

Умовно його можна замінити зрізаним конусом, як показано на рис. 1, а. У такому випадку точна розгортка цього конуса могла б слугувати наближеним варіантом розгортки витка коноїда. Проте суттєва різниця між формою поверхні катеноїда та конуса свідчить про значні пластичні деформації, які виникатимуть у процесі формування витка з плоскої заготовки. Однак частина гвинтового коноїда вилучається, тому вона міститься всередині валу, тобто та частина поверхні катеноїда, яка знаходиться в його нижній частині. При такому обмеженні катеноїда частина, що залишилася, значно краще апроксимується зрізаним конусом.

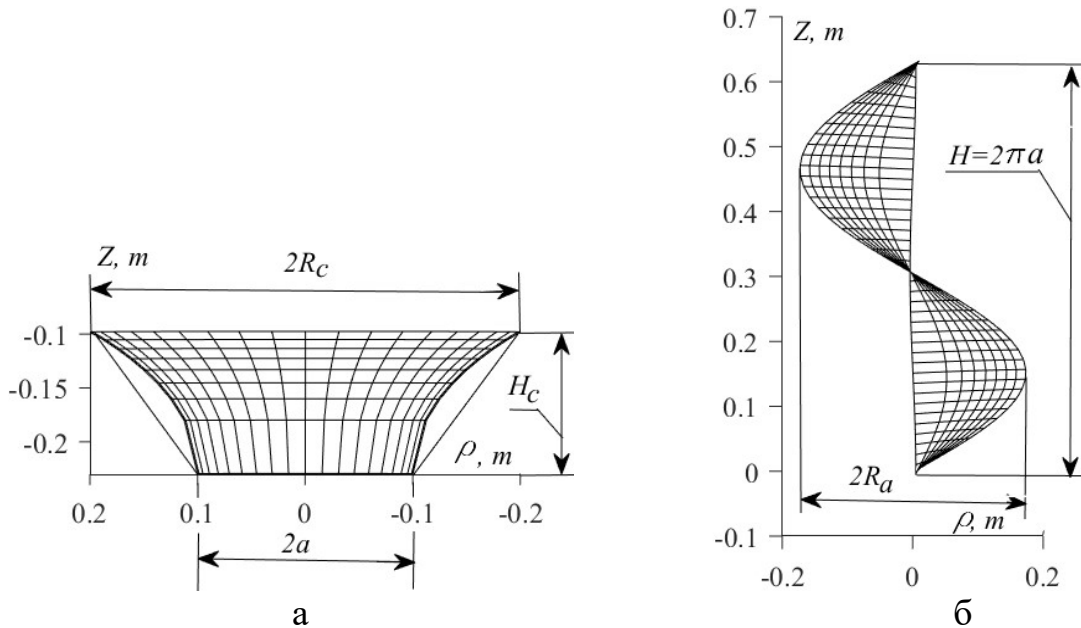


Рис.1. Фронтальні проекції поверхні, описаної рівняннями (24) при $a=0,1$ м і різних значеннях h :
 а – катеноїд ($h=0$); б – гвинтовий коноїд ($h=0,099$)

За рівняннями (24) можна отримати проміжні зображення поверхні при її згинанні, задаючи значення параметра згинання h в межах $0,1 > h > 0$.

Висновки. Застосування теореми Бура дало можливість отримати параметричні рівняння, які описують неперервне згинання поверхні обертання у гвинтову. Вихідною умовою є задане неявне рівняння меридіану.

Бібліографічний список

1. Bending of the Torses by Changing the Regularity of the Reverse Edge Angle of Ascent / Pylypaka, S., Volina, T., Hryshenko, I., Trokhaniak, O., Taras, I. // Journal for Geometry and Graphics. Volume 27 (2023), No. 2, 151–157. Режим доступу: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg27/j27h2pyly.pdf>
2. В. Хропост, Т. Кресан. Конструювання витка відкритого гелікоїда з плоскої заготовки. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 105. Київ. КНУБА, 2023. С. 213–221. Режим доступу: <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/297897>