

КРИВА ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛІНДРА, ЯКА ЗАБЕЗПЕЧУЄ СТАЛУ ШВИДКІСТЬ РУХУ ЧАСТИНКИ

Пилипака С.Ф.¹, д.т.н., професор,
psf55@ukr.ua, ORCID 0000-0002-1496-4615

Воліна Т.М.¹, к.т.н., доцент,
volina@nubip.edu.ua, ORCID 0000-0001-8610-2208

Кресан Т.А.², к.т.н., доцент,

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України,
(Україна, м. Київ)

tsm0515tsm@gmail.com, ORCID 0000-0002-8280-9502

² Відокремлений підрозділ НУБіП України «Ніжинський агротехнічний
інститут» (Україна, м. Ніжин)

Анотація. Відомо, що по площині, нахиленій під кутом тертя до горизонту, частинка може рухатися по прямій найбільшого нахилу із заданою сталою швидкістю. Ця швидкість залежить від початково заданої і може мати різну величину включаючи і нуль. Це означає, що при відсутності поштовху частинка рухатися не буде, а її стала швидкість руху буде залежати від сили поштовху в напрямі лінії найбільшого нахилу.

В статті розглянуто питання, чи існує криволінійний аналог прямолінійної траєкторії руху частинки по площині. Для цього розглядається крива ортогонального перерізу циліндричної поверхні з горизонтальними прямими. Якщо взяти довільний циліндр, то швидкість ковзання частинки по кривій його поперечного перерізу буде змінною. Розв'язується задача знаходження кривої поперечного перерізу для циліндра, по якій частинка могла б рухатися із сталою швидкістю під дією сили власної ваги.

Ключові слова. Прискорення, відцентрова сила, сила ваги, диференціальні рівняння, тригранник Френе, стала швидкість.

Постановка проблеми. Відомо, що під дією сили тяжіння частинка рухається по похилій площині вздовж напрямку найбільшого спуску. Такий рух може бути рівномірним, якщо кут нахилу площини дорівнює куту тертя, або рівноприскореним – коли цей кут перевищує кут тертя. Виникає питання: чи можуть існувати циліндричні поверхні з горизонтальними прямолінійними твірними, які забезпечують сталу швидкість руху частинки? Рух по такому циліндру можна розглядати як рух по кривій у його поперечному перерізі. Отже, просторову задачу можна звести до

площинної, а визначення форми циліндра – до пошуку відповідної кривої, що є його поперечним перерізом.

Аналіз останніх досліджень. Існують численні праці знаходження траєкторій руху окремої частинки як по нерухомих, так і по рухомих поверхнях. Щодо нерухомих або стаціонарних поверхонь здебільшого вони стосуються гвинтових поверхонь як таких, що широко використовуються для сепарації технологічного матеріалу в гірничорудній промисловості та різного роду гравітаційних спусків. Прикладом може служити праця [1], в якій розглянуто рух частинки під дією власної ваги по поверхні розгортного гелікоїда. Стосовно циліндричних стаціонарних поверхонь заслуговує на увагу праця [2], в якій розглянуто рух частинки по їх внутрішній поверхні.

Формулювання цілей. Розробити аналітичний опис руху частинки, яка ковзає по кривій поперечного перерізу горизонтального циліндра під дією сили власної ваги і при цьому має сталу швидкість.

Основна частина. Якщо в точці A (рис. 1, а) помістити частинку, то під дією сили власної ваги вона рухатиметься по кривій поперечного перерізу циліндра. При цьому може виникати як тангенціальне прискорення внаслідок зміни швидкості V руху, так і доцентрове внаслідок криволінійної траєкторії. Складання диференціальних рівнянь руху частинки зручно робити в проєкціях на орти супровідного тригранника Френе кривої поперечного перерізу циліндра. Вершина тригранника збігається із положенням частинки, при цьому орт біномаль $\bar{b}$ проєкціюється в точку (рис. 1, б). Під час руху точки по кривій завжди виникає прискорення w , навіть якщо швидкість V залишається сталою. Це прискорення має дві складові. Перша – тангенціальне прискорення – описує зміну модуля швидкості, проєкціюється на напрям дотичної до траєкторії, тобто на орт $\bar{\tau}$ та визначається як похідна швидкості за часом t : $w_{\bar{\tau}} = dV/dt$.

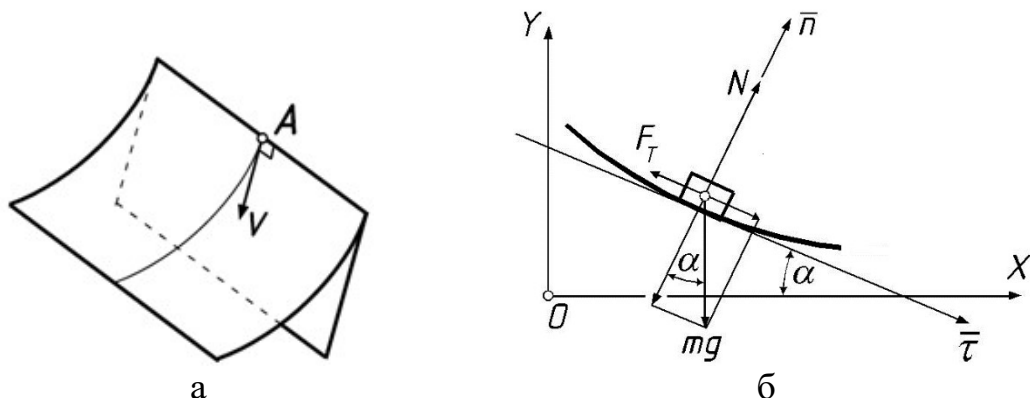


Рис. 1. Графічні ілюстрації до руху частинки по кривій поперечного перерізу горизонтального циліндра:
а) траєкторія руху частинки по поверхні циліндра вздовж кривої поперечного перерізу; б) супровідний тригранник Френе траєкторії (біномаль $\bar{b}$ проєкціюється в точку)

та проєкціювання на його орти діючих сил

Друга складова – нормальне або доцентрове прискорення – відображає зміну напрямку вектора швидкості і проєкціюється на орт головної нормалі тригранника Френе. Вона розраховується як добуток кривини k на квадрат швидкості V : $w_n = V^2 k$. Під час такого руху орієнтація супровідного тригранника змінюється, і її можна охарактеризувати кутом α , який утворює орт дотичної $\vec{\tau}$ з віссю OX нерухомої системи координат (рис. 1, б).

Запишемо відомі диференціальні рівняння руху частинки в проєкціях на орти супровідного тригранника Френе:

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau; \quad mV^2 k = F_n, \quad (1)$$

де m – маса частинки;

F_τ і F_n – проєкції прикладених до частинки сил.

Прикладеними силами є: сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), спрямована вниз; реакція N поверхні, спрямована вздовж головної нормалі тригранника; сила тертя F_T , спрямована в протилежну сторону напрямку руху частинки (рис. 1, б). Дві останні сили збігаються із ортами тригранника і не змінюють свого напрямку в його системі. Силу ваги розкладаємо на орти тригранника через кут α . Після цього рівняння (1) набувають вигляду:

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha - F_T; \quad mV^2 k = N - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Сила тертя F_T визначається через силу реакції N : $F_T = fN$, де f – коефіцієнт тертя. Реакцію N знаходимо із другого рівняння (2): $N = mg \cos \alpha + mV^2 k$. Таким чином, вираз для сили тертя запишеться: $F_T = fm(g \cos \alpha + V^2 k)$. Підставляємо цей вираз у перше рівняння (2) і після скорочення на масу m отримаємо диференціальне рівняння руху частинки по кривій:

$$\frac{dV}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - fV^2 k. \quad (3)$$

Отримане рівняння (3) неможливо розв'язати, тому що змінні величини t , V , α , k не приведені у функціональну залежність від однієї незалежної змінної. За таку змінну приймемо кут α нахилу орта дотичної до горизонтальної прямої. Отже швидкість V є функцією кута α , тобто $V = V(\alpha)$. Кривину, яка визначається, як швидкість зміни кута α від довжини дуги s , тобто $k = d\alpha/ds$, запишемо через обернену величину ρ : $\rho = 1/k = ds/d\alpha$. Здійснюємо наступне перетворення: $dV/dt = dV/d\alpha \cdot d\alpha/dt = \omega \cdot dV/d\alpha$, де ω – кутова швидкість повороту дотичної до кривої. Знайдемо її вираз через швидкість руху частинки і кривину кривої наступним чином: $\omega = d\alpha/dt = d\alpha/ds \cdot ds/dt = V \cdot d\alpha/ds = V/\rho$. Таким чином, вираз прискорення набуває

наступного вигляду: $dV/dt = V \cdot V' / \rho$. Із врахуванням цього рівняння, а також після заміни кривини k на обернену величину ρ рівняння (3) запишеться:

$$\frac{VV'}{\rho} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{fV^2}{\rho}. \quad (4)$$

Розв'яжемо (4) відносно $\rho = ds/d\alpha$ і отримаємо:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{V(V' + fV)}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}, \quad (5)$$

де швидкість V є функцією кута α її похідна визначається як $V' = dV/d\alpha$.

Залежність $\rho = ds/d\alpha$ є внутрішнім рівнянням кривої, не прив'язаним до системи координат. Перехід до координатного запису у вигляді параметричних рівнянь здійснюємо інтегруванням відомих виразів:

$$x = \int \rho \cos \alpha d\alpha; \quad y = \int \rho \sin \alpha d\alpha. \quad (6)$$

Після підстановки (5) у (6) і інтегрування отримуємо параметричні рівняння кривої поперечного перерізу циліндра:

$$\begin{aligned} x &= \frac{fV^2}{g} \int \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = \frac{fV^2}{g(1+f^2)} [\ln(f \cos \alpha - \sin \alpha) - f\alpha]; \\ y &= \frac{fV^2}{g} \int \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = \frac{fV^2}{g(1+f^2)} [f \ln(f \cos \alpha - \sin \alpha) + \alpha]. \end{aligned} \quad (7)$$

За рівняннями (7) на рис. 2 побудовано криві при різних сталих значеннях швидкості V і коефіцієнті тертя f . Вітки кривої прямують у нескінченність, при цьому асимптотично наближаються до прямої лінії. Можна допустити, що прямолінійні ділянки віток нахилені під кутом тертя $\alpha_\infty = \arctg f$ до горизонтальної прямої. До рівнянь (7) входить вираз $\ln(f \cos \alpha - \sin \alpha)$. Знайдемо границю цього виразу при прямуванні кута α до кута тертя:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \arctg f} \ln(f \cos \alpha - \sin \alpha) = -\infty. \quad (8)$$

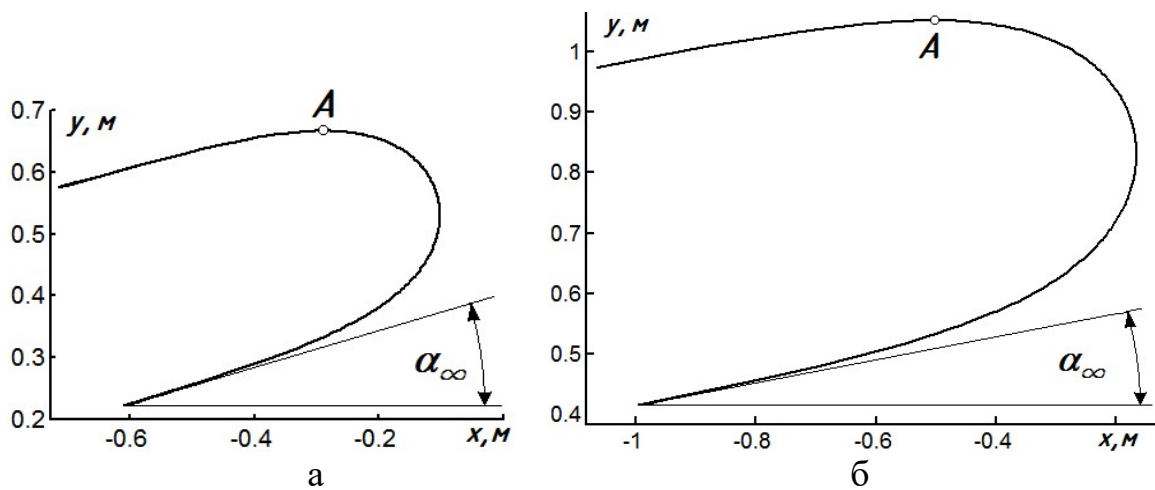


Рис. 2. Криві поперечного перерізу циліндра, які забезпечують сталу швидкість руху частинки V по них під дією сили своєї ваги:

$a - V=2 \text{ м/с}, f=0,3; \quad б - V=3 \text{ м/с}, f=0,2$

Це вказує на те, що наше допущення правильне. Криві на рис. 2 розбиті на дві ділянки точкою A . Якщо в точці A надати матеріальній частинці початкову швидкість V , спрямовану вліво, вона почне рухатися по опуклій стороні кривої, яка поступово наближатиметься до прямої, нахиленої до горизонту під кутом тертя. У разі, коли частинка отримує початкову швидкість V , спрямовану вправо, вона так само рухатиметься по кривій, що з часом наближається до прямої, але вже з увігнутої сторони. У цьому випадку ділянку кривої можна розглядати як своєрідний кожух, який змінює траєкторію руху частинки під час її вільного польоту. Без такого кожуха частинка рухалася б по параболі з прискоренням (якщо не враховувати опір середовища). Завдяки тертю, що діє в межах кожуха, прискорення гаситься, і частинка продовжує рух із сталою швидкістю. На відміну від похилої площини, форма кривої в поперечному перерізі циліндра визначається заданою швидкістю V руху частинки. Якщо площина нахилена під кутом тертя до горизонту, то по ній частинка може рухатися з будь-якою заданою початковою швидкістю. Для циліндричної поверхні рух частинки відбувається інакше. Крива перерізу знаходиться для конкретної швидкості. Для різних сталих швидкостей форма перерізу змінюється. Це пояснюється тим, що при русі частинки по кривій виникає відцентрова сила, яка відсутня при русі по прямій.

Висновки. Отримано аналітичний опис руху частинки під дією сили своєї ваги по кривих, які представляють собою поперечний переріз циліндра із горизонтальними прямолінійними твірними. Розв'язання задачі відбувається у два етапи. На першому етапі складається диференціальне рівняння руху у проєкціях на орти супровідного тригранника Френе кривої. Його розв'язком є внутрішнє рівняння кривої, що задає залежність довжини дуги від кута нахилу дотичної. На другому етапі здійснюється перехід від цього внутрішнього опису, незалежного від декартової системи координат, до параметричних рівнянь. Запропонований підхід дозволяє будувати форму поперечного перерізу циліндра відповідно до заданих умов руху частинки. Зокрема, знайдено криву поперечного перерізу циліндра, яка є траєкторією руху частинки із заданою сталою швидкістю.

Бібліографічний список

1. Войтюк Д.Г. Знаходження траєкторії руху матеріальної точки по гравітаційній розгортній поверхні на прикладі розгортного гелікоїда / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // *Механізація і енергетика сільського господарства*. IV міжнародна науково-технічна конференція MOTROL-2003. Київ. НАУ, 2003. Том 6. С. 113–126.

2. Лінник М.К. Дослідження руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні стаціонарного циліндра / М.К. Лінник, С.Ф. Пилипака // *Вісник аграрної науки*. Київ, 2006. № 2. С. 48–54.