УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЇ СИСТЕМИ КОООРДИНАТ

Пилипака С.Ф., д.т.н., професор,
psf55@ukr.ua, ORCID 0000-0002-1496-4615
Несвідомін А.В., к.т.н., докторант[1]
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID 0000-0002-9227-4652
Національний університет біоресурсів і природокористування України, (Україна, м. Київ)
Кресан Т.А., к.т.н., доцент,
tsm0515tsm@gmail.com, 0000-0002-8280-9502
Хропост В.І., доктор філософії,
hropost97@ukr.net, ORCID 0000-0001-9363-3955
Відокремлений підрозділ НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна, м. Ніжин)

***Анотація**. Мінімальні поверхні є цікавими як з точки зору диференціальної геометрії, так і з точки зору математичної фізики. Вони характеризуються нульовою середньою кривиною, мають найменшу площу і розділяють середовища із однаковим тиском. Тому мильна плівка, натягнута на замкнений контур, приймає форму мінімальної поверхні. Такі поверхні є одним із класичних об'єктів диференціальної геометрії. Над способами їх знаходження та математичного опису працювали відомі математики, тому багато мінімальних поверхонь носять їх імена. В основі деяких способів побудови мінімальних поверхонь лежить уявна просторова крива нульової довжини.*

Розглянуто конструювання мінімальних поверхонь на основі уявної кривої нульової довжини в циліндричній системі координат. Предметом дослідження є встановлення закономірностей утворення поверхонь в залежності від форми уявних кривих. Мета роботи полягає у знаходженні способу конструювання мінімальних поверхонь з допомогою циліндричної системи координат. Дослідження проведені методами диференціальної геометрії. Отримані результати можуть бути застосовані в проєктуванні архітектурних об'єктів із виразними контурами і поверхнями.

***Ключові слова –** уявна просторова крива, нульова довжина, комплексна змінна, уявна і дійсна частини.*

Постановка проблеми. Конструювання мінімальних поверхонь є об'єктом дослідження багатьох математиків і геометрів. Ними розроблялися різні способи конструювання, варіаційний метод. Одним із таких методів є конструювання

[1] Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

мінімальних поверхонь на основі уявної просторової кривоїнульової довжини, яка носить назву ізотропної кривої. Його суть полягає в тому, що замість незалежної змінної в параметричні рівняння уявної кривої підставляють комплексну змінну. Після цього потрібно у кожному рівнянні розділити дійсну і уявну частини. Дійсна частина описує мінімальну поверхню, а в уявній частині відкидаємо уявну одиницю і вона теж описує так звану приєднану мінімальну поверхню. Однак при конструюванні поверхонь таким способом виникають певні труднощі. По перше, не у всіх виразах комплексної змінної можна розділити дійсну і уявну частини. По друге, у виразі довжини дуги, яка визначається через квадратний корінь і який в свою чергу прирівнюється до нуля, потрібно в подальшому його позбутися. Частково це вдається зробити, описавши уявну криву в циліндричній системі координат.

Аналіз останніх досліджень. Зважаючи на те, що мінімальні поверхні знаходять своє застосування в архітектурі та інженерії, теорія їх математичного опису є сьогодні одним із найбільш динамічних напрямів диференціальної геометрії. Фундаментальні аспекти цієї теми детально висвітлені у монографії [1]. В праці [2] показано розвиток класичних уявлень про катеноїди та доведено існування складних топологічних форм без самоперетинів. Останнім часом дослідження в цій сфері характеризуються переходом до дослідження поверхонь у неевклідових просторах. Зокрема, у роботах [3, 4] розглядаються гелікоїдальні мінімальні поверхні у сферичних та гіперболічних просторах. Однак для практичного впровадження у сфері проектування велике значення мають методи, що спрощують аналітичний опис таких форм. Так, у роботі [5] запропоновано підхід до опису мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих за допомогою інтегральних залежностей. Він дозволяє адаптувати складний математичний апарат до потреб прикладної геометрії для подальшої розробки алгоритмів комп’ютерного моделювання оболонок та тентових конструкцій.

Формулювання цілей. Створити математичну модель конструювання мінімальної поверхні на основі кривої нульової довжини із застосуванням циліндричної системи координат.

Основна частина. Якщо задана залежність радіус-вектора ρ від полярного кута φ у вигляді $\rho=\rho(\varphi)$, а також координата $z=z(\varphi)$, то ці залежності задають просторову криву у циліндричній системі координат. Її параметричні рівняння запишуться:

$$x = \rho\cos\varphi; \qquad y = \rho\sin\varphi; \qquad z = z(\varphi). \tag{1}$$

За відомою формулою можна знайти залежність для визначення довжини її дуги s:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 + z'^2}. \tag{2}$$

Для того, щоб крива (1) мала нульову довжину, достатньо виконати наступну умову:

$$\rho'^2 + \rho^2 + z'^2 = 0. \tag{3}$$

Розв’язавши рівняння (3) відносно $z=z(\varphi)$, отримуємо:

$$z = i\int \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi\,, \qquad (4)$$

де i – уявна одиниця.

Інший варіант:

$$\rho^2 = -\left(\rho'^2 + z'^2\right) \qquad \text{звідки} \qquad \rho = i\sqrt{\rho'^2 + z'^2} \qquad (5)$$

В обох випадках (4) і (5) наявність квадратного кореня становить перешкоду для подальшої побудови мінімальної поверхні, оскільки при цьому стає неможливим розділення виразів на дійсну і уявну частини. Однак для деяких випадків цю перепону можна усунути. Наприклад, для підкореневого виразу (4) поставимо умову $\rho=\rho'$, звідки $\rho=e^{\varphi}$. Після інтегрування виразу (4) отримуємо залежність $z=z(\varphi)$. Параметричні рівняння просторової кривої нульової довжини згідно (1) запишуться:

$$x = e^{\varphi}\cos\varphi; \qquad y = e^{\varphi}\sin\varphi; \qquad z = i\sqrt{2}e^{\varphi}. \qquad (6)$$

В цілому просторова крива (6) уявна, однак її горизонтальна проекція дійсна і є логарифмічною спіраллю. Після підстановки у (6) замість змінної φ комплексної змінної $u+i\cdot v$ і розділення дійсної і уявної частин отримаємо параметричні рівняння двох мінімальних поверхонь.

Рівняння, що відповідають дійсній частині:

$$\begin{aligned} X &= e^{u}\left(\cos u\cos v\cosh v + \sin u\sin v\sinh v\right); \\ Y &= e^{u}\left(\sin u\cos v\cosh v - \cos u\sin v\sinh v\right); \\ Z &= -\sqrt{2}e^{u}\sin v. \end{aligned} \qquad (7)$$

Рівняння, що відповідають уявній частині (приєднана поверхня):

$$\begin{aligned} X &= e^{u}\left(\cos u\sin v\cosh v - \sin u\cos v\sinh v\right); \\ Y &= e^{u}\left(\sin u\sin v\cosh v + \cos u\cos v\sinh v\right); \\ Z &= \sqrt{2}e^{u}\cos v. \end{aligned} \qquad (8)$$

Відсіки поверхонь за рівняннями (7) і (8) побудовано на рис. 1.

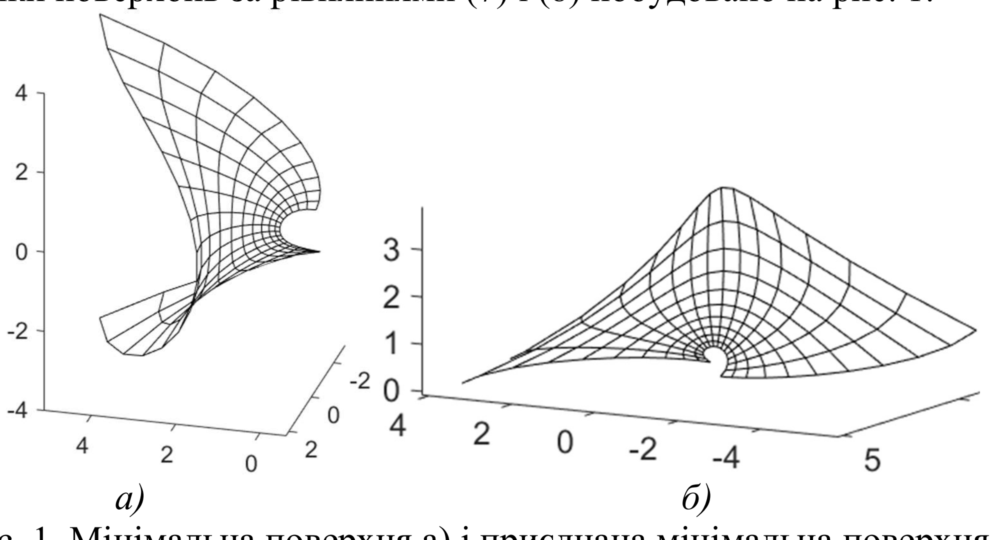


Рис. 1. Мінімальна поверхня а) і приєднана мінімальна поверхня б)

Перейдемо до виразу (5). Щоб позбутися квадратного кореня поставимо умову $\rho'=z'$, тобто $\rho=z$. В такому випадку отримуємо диференціальне рівняння, яке вдається проінтегрувати:

$$\rho = i\sqrt{2}\rho' \qquad \text{звідки} \qquad \rho = e^{i\varphi/\sqrt{2}} . \tag{9}$$

Таким чином, параметричні рівняння уявної просторової кривої нульової довжини запишуться:

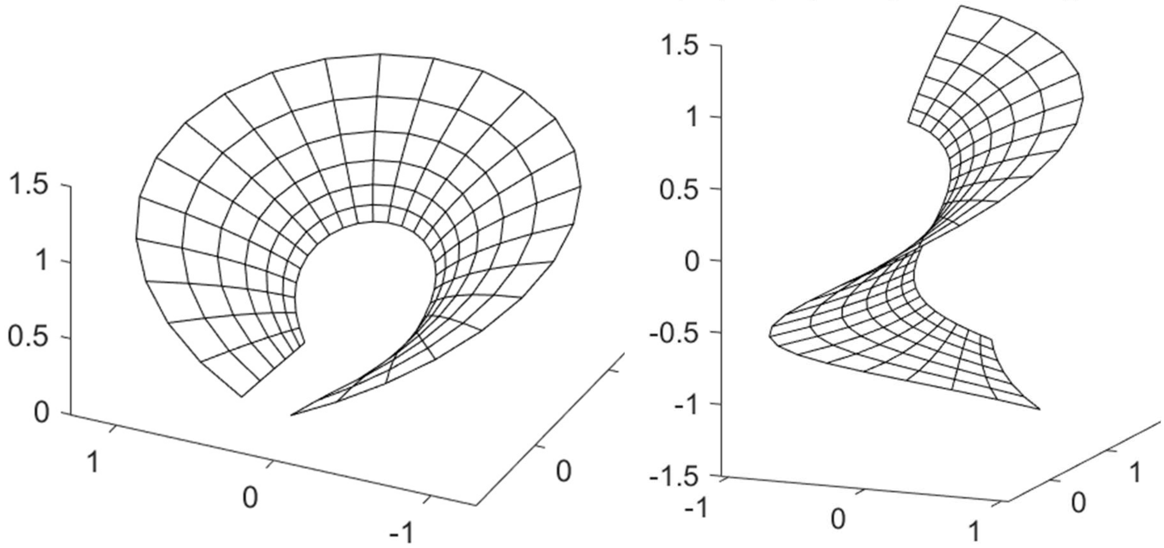
$$x = e^{i\varphi/\sqrt{2}}\cos\varphi; \qquad y = e^{i\varphi/\sqrt{2}}\sin\varphi; \qquad z = e^{i\varphi/\sqrt{2}} . \tag{10}$$

Параметричні рівняння мінімальної і приєднаної мінімальної поверхонь запишуться:

$$\begin{aligned} X &= e^{-v/\sqrt{2}}\left(\cos u\cos\left(u/\sqrt{2}\right)\cosh v + \sin u\sin\left(u/\sqrt{2}\right)\sinh v\right);\\ Y &= e^{-v/\sqrt{2}}\left(\sin u\cos\left(u/\sqrt{2}\right)\cosh v - \cos u\sin\left(u/\sqrt{2}\right)\sinh v\right);\\ Z &= e^{-v/\sqrt{2}}\cos\left(u/\sqrt{2}\right). \end{aligned} . \tag{11}$$

$$\begin{aligned} X &= e^{-v/\sqrt{2}}\left(\cos u\sin\left(u/\sqrt{2}\right)\cosh v - \sin u\cos\left(u/\sqrt{2}\right)\sinh v\right);\\ Y &= e^{-v/\sqrt{2}}\left(\sin u\sin\left(u/\sqrt{2}\right)\cosh v + \cos u\cos\left(u/\sqrt{2}\right)\sinh v\right);\\ Z &= e^{-v/\sqrt{2}}\sin\left(u/\sqrt{2}\right). \end{aligned} . \tag{12}$$

Мінімальні поверхні за рівняннями (11) і (12) побудовані на рис. 2.



а б

Рис. 2. Мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (11) а) і рівняннями (12) б)

Пошук мінімальних поверхонь за допомогою циліндричної системи координат можна значно розширити, якщо перейти від незалежної змінної φ до залежностей $\rho=\rho(s)$, $\varphi=\varphi(s)$ і $z=z(s)$, де s – довжина дуги кривої. В такому випадку рівність (3) набуває вигляду:

$$\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 + z'^2 = 0 . \tag{13}$$

Для цього випадку є цікавим варіант, що відповідає виразам (5). Він запишеться наступним чином:

$$\rho^2 \varphi'^2 = -\left(\rho'^2 + z'^2\right) \qquad \text{звідки} \qquad \rho = \frac{i}{\varphi'}\sqrt{\rho'^2 + z'^2}\,. \qquad (14)$$

Як і в попередньому випадку, приймаємо умову $\rho'=z'$, тобто $\rho=z$. Звідси отримуємо диференціальне рівняння, яке можна проінтегрувати:

$$\rho = \frac{i\sqrt{2}\rho'}{\varphi'} \qquad \text{звідки} \qquad \rho = e^{\frac{\varphi}{i\sqrt{2}}}\,. \qquad (15)$$

У виразах (15) кут φ є функцією довжини дуги s: $\varphi=\varphi(s)$. Для спрощення виразів у (15) зробимо наступну заміну:

$$\varphi = i\sqrt{2}f \qquad \text{після чого} \qquad \rho = e^{f}\,, \qquad (16)$$

де $f=f(s)$. Параметричні лінії нульової довжини після цього запишуться:

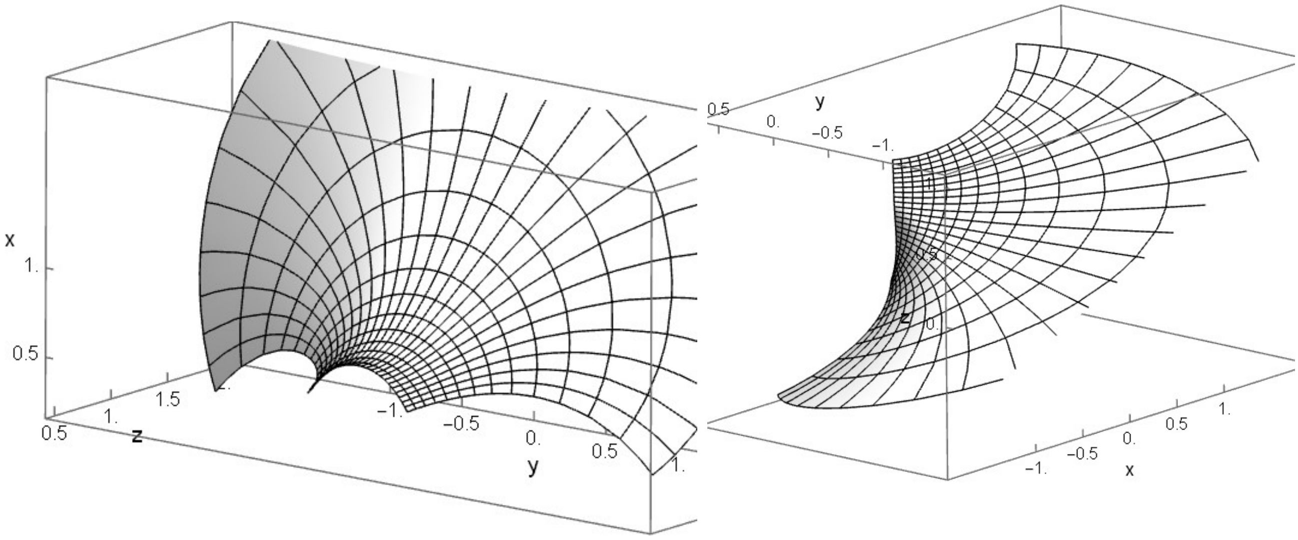
$$x = e^{f}\cos\left(i\sqrt{2}f\right); \qquad y = e^{f}\sin\left(i\sqrt{2}f\right); \qquad z = e^{f}\,. \qquad (17)$$

Перевіркою можна переконатися, що для будь-якої залежності $f=f(s)$ рівняння (17) описують лінію нульової довжини. Однак не всі функції $f=f(s)$ при переході до комплексної змінної допускають розділення рівнянь (17) на дійсну і уявну частини, але таких функцій існує багато з доповненням їх комбінацій. Розглянемо приклад.

Нехай $f=\mathrm{tg}s$. Ізотропна крива згідно (17) запишеться:

$$x = e^{\mathrm{tg}s}\cos\left(i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}s\right); \qquad y = e^{\mathrm{tg}s}\sin\left(i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}s\right); \qquad z = e^{\mathrm{tg}s}\,. \qquad (18)$$

Після підстановки замість змінної s комплексної змінної $u+i\cdot v$ в (18) розділення змінних, також побудова поверхонь здійснювалася за допомогою програмного продукту “Mathematica” (рис. 3).



а б

Рис. 3. Мінімальні поверхня а) і приєднана мінімальна поверхня б), побудовані за рівнянням ізотропної кривої (18)

Рівняння самої поверхні не наводимо із-за їх громіздкого вигляду. Варто зазначити, що дійсну і уявну частину для ізотропної кривої (17) можна розділити при підстановці в неї тригонометричних функцій, а також функцій гіперболічної тригонометрії. Це значно розширює можливості побудови мінімальних поверхонь.

Висновки. Для утворення просторових ізотропних кривих та їх математичного опису були застосовані циліндричні координати. При цьому крива може бути описана як у функції кута повороту радіус-вектора, так і у функції довжини дуги. У другому випадку можливості знаходження ізотропних кривих значно розширюються. В окремому випадку вдається проінтегрувати вирази і отримати узагальнені параметричні рівняння, до яких входить функція, залежна від довжини дуги: $f=f(s)$. Такою функцією може бути довільна залежність, однак не всі вони допускають розділення рівнянь при переході до комплексної незалежної змінної на дійсну і уявну частини. Зокрема, таку можливість допускають тригонометричні функції та функції гіперболічної тригонометрії. Розроблений підхід розширює можливості утворення і побудови мінімальних поверхонь, які мають застосування в архітектурі і інженерії.

Бібліографічний список

1. Dierkes U., Hildebrandt S., Sauvigny F. Minimal Surfaces. Berlin : Springer, 2010. 688 p. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-11698-8 (date of access: 27.04.2026).
2. Hoffman D., Meeks W. H. Minimal surfaces based on the catenoid. The American Mathematical Monthly. 1990. Vol. 97, № 8. P. 702–730. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1990.11995658
3. Castro I., Castro-Infantes I., Castro-Infantes J. Helicoidal minimal surfaces in the 3-sphere: an approach via spherical curves. Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 2024. Vol. 118, № 77. DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-024-01574-3
4. Kim Y. W., Koh S.-E., Shin H., Yang S.-D. Helicoidal minimal surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$. Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2012. Vol. 86, № 1. P. 135–149. DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972711003042
5. Аналітичний опис мінімальних поверхонь на основі ізотропних ліній за допомогою інтегральних залежностей / С. Ф. Пилипка та ін. Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжвід. наук.-техн. зб. / Київ. нац. ун-т будва і архітектури. Київ : КНУБА, 2020. Вип. 97. С. 110–118. URL: https://repositary.knuba.edu.ua/handle/987654321/10171