УДК 539.37:004.925.8

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИВИМІРНИХ БАЛОК МЕТОДОМ БАЗОВИХ ХЕЛІКСНИХ ТА ПОПРАВОЧНИХ ЗГЛАДЖУЮЧИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Кулик К.А., аспірант*
kulyk.kostiantyn@lll.kpi.ua, ORCID: 0009-0000-7915-5395
Ориняк І.В., д.т.н., професор, ФПСПМ
orynyak.iv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4529-0235
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського» (Україна, м. Київ)

Анотація. *У роботі розглядається проблема геометричного моделювання значних нелінійних деформацій тривимірних балок. Метою роботи є розробка та реалізація ітераційного методу, що поєднує точність класичної механіки з вимогами швидкодії та інтерактивності комп'ютерної графіки. Запропоновано методологію, де основна частина нелінійної деформації поглинається базовим хеліксним елементом, а залишкові напруження компенсуються малим лінійним поправочним розв'язком. Розроблено інтерактивний веб-додаток, що дозволяє керувати симуляцією в реальному часі. Результати верифіковано на основі задачі Bathe, що підтверджує високу швидкість збіжності за невеликої кількості елементів. Метод має значний потенціал застосування в інженерній графіці, анімації та системах автоматизованого проєктування.*

Ключові слова: *деформація; тривимірні гнучкі балки; геометрична нелінійність; хелікс; метод початкових параметрів; метод скінченних елементів; метод базових і поправочних розв'язків.*

Постановка проблеми. Традиційно існує розрив між підходами до моделювання деформацій у прикладній механіці та в комп'ютерній графіці. У машинобудівній та будівельній галузях виникнення великих деформацій зазвичай розглядається як критична, небажана ситуація (втрата стійкості, руйнування), якої намагаються уникнути. Тому класичні методи зосереджені на малих переміщеннях. Натомість, у сучасній інженерній графіці, кіно- та гейм-індустрії постійно виникає потреба в інтерактивній симуляції великих деформацій (гнучкі стрижні, канати, поверхні). При цьому, методи комп'ютерної графіки часто жертвують фізичною точністю заради простоти та швидкодії. Відтак, актуальною є проблема створення обчислювальних методів, здатних забезпечити достатню фізичну достовірність результатів при збереженні задовільної швидкості розв'язання.

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Ориняк І.В.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз просторово вигнутих балок суттєво складніший за плоскі випадки. Найбільш поширені чисельні підходи, такі як коротаційні формулювання, мають недоліки у вигляді необ'єктивності вимірювань механічної напруги при значних зсувах. Останні досягнення в комп'ютерній графіці яскраво демонструють запит на кількісну (а не лише якісну) фізичну перевірку симуляторів надійними механічними моделями [1]. Це особливо критично для еластичних структур зі складною геометрією, де виникають нелінійні зв'язки між згином та крученням. В попередніх дослідженнях авторів були запропоновані базові тривимірні хеліксні елементи [2] для врахування геометричної нелінійності, та перевірено доцільність їх використання в якості самостійних розв'язків [3]. Однак метод не демонстрував стійкої збіжності при складних конфігураціях.

Формулювання цілей. Метою даного дослідження є розробка та програмна реалізація вдосконаленого методу геометрично нелінійного аналізу тривимірних балок, який базується на поєднанні базового хеліксного та (малого лінійного) поправочного розв'язків. Окремим завданням є створення інтерактивного програмного середовища, яке дозволяє користувачу керувати параметрами задачі та спостерігати процес розв'язку «в реальному часі».

Основна частина. В основі запропонованого підходу лежить метод базових хеліксних та поправочних згладжуючих розв'язків. Крива $\vec{\Pi}(s)$, що моделює деформовану балку, розбивається на скінченну кількість елементів. Кожен елемент апроксимується базовим розв'язком у вигляді хеліксу із постійними значеннями кривизни K та скрута T, а також положенням першої точки, $\vec{\Pi}_0$, та напрямками базових природних векторів на початку, $\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{\beta}_0$, що складають праву трійку [4]. Базові вектори в довільній точці хелікса, $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{\beta}(s)$, виражаються через початкові вектори за допомогою матриці повороту:

$$\begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{\beta}(s) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}_{t,n,\beta}(s) \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Аналогічно виражається положення довільної точки хелікса:

$$\vec{\Pi}(s) = \vec{\Pi}_0 + \overrightarrow{AB}_{\Pi}(s) \cdot \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В ході ітераційного процесу параметри хеліксів уточнюються, щоб наблизити шукану деформацію. В результаті між кінцями сусідніх елементів виникають розриви як у переміщеннях, так і в напрямках базових векторів. Тому повний розв'язок задачі шукається як сума базового розв'язку (що поглинув основну геометричну нелінійність) та малого поправочного розв'язку.

Поправочний розв'язок визначається 4-ма векторними величинами: силою $\vec{Q}(s)$, моментом $\vec{M}(s)$, кутом $\vec{\Psi}(s)$ та переміщенням $\vec{\Pi}(s)$. Кожна з цих величин задається в системі базових векторів відповідної точки:

$$\vec{W}(s) = W_t(s) \cdot \vec{t}(s) + W_n(s) \cdot \vec{n}(s) + W_\beta(s) \cdot \vec{\beta}(s). \tag{3}$$

Величини пов'язані одна з одною за допомогою наступних диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\frac{d\vec{Q}(s)}{ds} = \vec{F} = const, \\
\frac{d\vec{M}(s)}{ds} = -\vec{t}(s) \times \vec{Q}(s), \\
\frac{d\vec{\Psi}(s)}{ds} = -\frac{M_t(s)}{GJ}\vec{t}(s) - \frac{M_n(s)}{EI}\vec{n}(s) - \frac{M_\beta(s)}{EI}\vec{\beta}(s), \\
\frac{d\vec{\Pi}(s)}{ds} = \vec{\Psi}(s) \times \vec{t}(s).
\end{gathered} \tag{4}$$

Кожне з цих рівнянь оперує векторними величинами, і зводиться до рівняння 3-го порядку відносно компоненти $W_t(s)$. Розв'язок такого рівняння знаходиться за допомогою функцій Крилова, що дозволяє отримати аналітичні залежності для поправочних змінних вздовж елемента у стилі методу початкових параметрів (МПП). Після цього формується розріджена СЛАР, яка включає рівняння зв'язку на елементах, рівняння спряження між ними та граничні умови. Ця СЛАР розв'язується відносно невідомих поправочних змінних на краях елементів (24 змінні на елемент).

На основі знайденого поправочного розв'язку виконується уточнення базового розв'язку з використанням коефіцієнта масштабування $0 < \mu < 1$. Наприклад, базове положення $\vec{\Pi}_b$ уточнюється наступним чином:

$$\vec{\Pi}_{b,new} = \vec{\Pi}_b + \vec{\Pi}_0 \cdot \mu. \tag{5}$$

Де $\vec{\Pi}_0$ – поправочне переміщення на початку елемента. Після оновлення базової геометрії та перерахунку матеріальних і природних базисів, алгоритм переходить до наступної ітерації до досягнення необхідної точності.

Попередня робота продемонструвала, що самостійні базові хеліксні розв'язки мають нестабільну збіжність при розв'язку складних задач. Збіжність також залежала від вибору початкових параметрів та швидкості приросту навантаження. При використанні комбінації базових та поправочних розв'язків суттєво зростає стабільність збіжності, зникає потреба в оптимізованому виборі початкової геометрії та стає можливим зміна параметрів задачі «на льоту».

Для верифікації методу було використано задачу Bathe [5] (тест на згин консольної криволінійної балки). Запропонований метод дозволяє отримати ті ж самі результати, що наведені в роботі Bathe, але, оскільки координата останньої точки наведена з невеликої точністю (лише 3 значущих цифри), за еталонний точний розв'язок прийнято результат обчислення на 1000 елементах.

В таблиці 1 наведено кількість ітерацій, які потрібно виконати для досягнення заданої точності (коефіцієнт масштабування $\mu = 0.5$):

Таблиця 1

Необхідна кількість ітерацій для задачі Bathe

К-ть елементів	1%	0.1%	0.01%	0.001%
5	3	–	–	–
20	2	3	–	–
50	1	5	8	–
200	1	2	6	11

Висновки. Метод базових хеліксних та поправочних згладжуючих розв'язків дозволяє розв'язувати задачі геометричного моделювання значних нелінійних деформацій тривимірних балок. Уперше розроблено тривимірний поправочний розв'язок в хеліксній системі координат. Результати верифіковано на основі задачі Bathe, що підтверджує високу швидкість збіжності за невеликої кількості елементів та зняття необхідності в оптимізованому виборі початкової геометрії. Метод має значний потенціал для застосування в інженерній графіці, системах автоматизованого проєктування, кіно- та гейм-індустрії.

Бібліографічний список

1. Romero V. et al. Physical validation of simulators in Computer Graphics: A new framework dedicated to slender elastic structures and frictional contact. ACM Transactions on Graphics. 2021. Vol. 40, No. 4. Article 66. DOI: 10.1145/3450626.3459931.
2. Сучасні проблеми механіки та математики – 2023 : матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 23–25 травня 2023 р.). Львів, 2023.
3. Orynyak I. V., Kulyk K. A., Mazuryk R. V. 3D Analysis of Geometrically Nonlinear Deformation of the Beams by the Method of Basic Helical Elements. Journal of Mathematical Sciences. 2025. Vol. 291. P. 755–770. DOI: 10.1007/s10958-025-07849-3.
4. Розрахунки складних систем методом початкових параметрів : навч. посіб. / уклад. І. В. Ориняк. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 252 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48744 (дата звернення: 05.05.2026).
5. Albino J. C. R., Almeida C. A., Menezes I., Paulino G. H. Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). Engineering Structures. 2018. Vol. 173. P. 283–299. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.092.