

## МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТОЧОК НА ЗОБРАЖЕННЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА

Кольцов Д.Р., аспірант\*

koltsovdd@gmail.com ORCID: 0000-0003-4529-0235

Ориняк І.В., д.т.н., професор

orynyak.iv@gmail.com ORCID: 0000-0003-4529-0235

Тавров Д.Ю., к.т.н., доцент

tavrov.danylo@iit.kpi.ua ORCID: 0000-0002-3689-2931

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

***Анотація:** Розглянуто метод визначення кутових точок на оцифрованих безколірних зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна (КБС). Метою роботи є розробка підходу до автоматичної ідентифікації кутових точок на контурах об'єктів, що базується на адаптивному згладжуванні та аналізі локальної відповідності контуру виміряним точкам. Запропоновано поняття кутової даммі-точки, для якої допускається розрив напрямку дотичної та постулюється нульова кривизна. Введено поняття інтегральної роботи як локальної характеристики відповідності згладженого контуру точкам вимірювань. Ефективність методу продемонстровано на прикладі визначення кутів елемента пазла, де відношення робіт до і після введення кутової даммі-точки становить 8–30 для реальних кутових точок. Результати можуть застосовуватися в задачах комп'ютерного зору, розпізнавання образів та геометричного моделювання кривих.*

***Ключові слова:** коротаційний балковий сплайн; кутові точки; геометричне моделювання; адаптивне згладжування; інтегральна робота.*

**Постановка проблеми.** Пошук кутових точок на зображеннях має велике значення для ідентифікації образів і має багато сфер застосування в комп'ютерному зорі та розпізнаванні образів. Зазвичай для цього використовують геометричний аналіз чорно-білих контурів, до яких потім застосовують гаусівське згладжування для виявлення точок найбільшої кривизни. Потім до цих ділянок застосовують мінімізацію певних функціоналів для визначення величини кута між суміжними ділянками контуру. Недоліком такого підходу є складності у врахуванні артефактів і те, що за більшого згладжування зменшується масштаб (розмір) зображення.

**Аналіз останніх досліджень.** Пошук кутових точок є важливою задачею комп'ютерного зору, оскільки такі точки виступають стійкими локальними ознаками форми та використовуються для розпізнавання й аналізу зображень [1–3], зокрема у 3D-реконструкції, калібруванні камер, медичній візуалізації, автономній навігації [4–8]. Існуючі методи виявлення кутів поділяють на шаблонні,

інтенсивнісні та контурні [9, 10]. Контурні методи аналізують зміну кривизни цифрової кривої [10, 11], проте їх точність залежить від якості згладжування, рівня шуму та артефактів [12–14]. У цій роботі пропонується підхід на основі коротаційного балкового сплайна (КБС), який забезпечує адаптивне згладжування та зберігає масштаб контуру [15, 16].

**Формулювання цілей.** Метою роботи є розробка методу визначення кутових точок на контурах оцифрованих зображень за допомогою коротаційного балкового сплайна. Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання: ввести поняття кутової даммі-точки із спеціальними умовами спряження, що допускають розрив напрямку дотичної; ввести поняття інтегральної роботи як локальну міру відповідності згладженого контуру точкам вимірювань; запропонувати критерій ідентифікації кутових точок на основі відношення інтегральних робіт до і після введення кутової даммі-точки; перевірити метод на реальних даних контуру елемента пазла.

**Основна частина.** Основна спрямованість роботи стосується методу визначення положення і величини стрибка кута в зображеннях, отриманих фотографуванням чи скануванням. Використано насамперед практичні дані й методики, запропоновані в роботі [17], де описано згладжування і зіставлення кривих для автоматичного укладання безколірного пазла. У цій статті ми вводимо дві нові особливості, що збагачують техніку КБС. По-перше, введемо спеціальну кутову даммі-точку, що забезпечує можливість різкої зміни напрямку дотичної до контуру. По-друге, введемо поняття інтегральної роботи як локальну характеристику відповідності положенню заміряних точок до згладженого контуру. На основі цього запропонуємо критерій доцільності введення кутової точки як відношення роботи з наявною кутовою точкою до роботи без неї.

## 1. Концепція кутової даммі-точки

Для розв'язання задачі визначення кутової точки і мінімізації її впливу на гладкість контуру введемо особливу точку, а саме кутову даммі-точку. В попередніх роботах ми вводили поняття (звичайної) даммі-точки [15, 17]. Даммі-точка – це точка, що не пов'язана з реальними точками замірів, її вводять для забезпечення малості розрахункових кутів  $\theta$ , що приводить до гладкої зміни кривизни. Положення даммі-точок не впливає на вигляд розрахункового контуру, має значення лише їх достатня кількість.

Тут введемо особливу – кутову – даммі-точку, яка і служитиме для ідентифікації як розміщення точок перегину кутів, так і величини стрибка кута в ній. Математична відмінність кутової даммі-точки від звичайної полягає в рівняннях спряження

Рівняння спряження відрізняються від інших точок тим, що рівняння неперервності дотичних не враховуємо. Замість нього вводимо рівняння рівності моменту (кривизни) нулю у кутовій точці. Пояснимо логіку цієї умови. Поворотів (змін напрямку) на всіх інших ділянках (що не містять кутових точок) наближено досягають за рахунок добутку кривизни на довжину ділянки. Якщо не обмежити

моменти, то виникне невизначеність у способі зміни кута. Окрім того, у цій точці немає приросту сили, тобто сили в кінці попередньої ділянки і на початку наступної збігаються.

## 2. Метод побудови наближеного контуру і визначення кандидатів кутових точок

Ідентифікацію починаємо з побудови наближеного контуру. Є набір початкових точок вимірювання, їх кількість для кожного елемента пазла близька до 2300 [17]. Використаємо функцію `findContours` з бібліотеки `OpenCV` для виділення контуру із зображення. Ці точки є більш-менш упорядкованими, але все одно після отримання послідовності (нумерації) точок контуру вони в певному околі є перемішаними, містять артефакти, тобто існує певна нечіткість щодо порядку їх розміщення. Тому спочатку вибираємо кожну 20-ту точку (точки  $B$  на рис. 1). Проведемо розрахунок й отримаємо нові положення точок  $A'_i$ . Цей контур дає нам початкове наближення, з якого починається більш детальна процедура уточнення контуру.

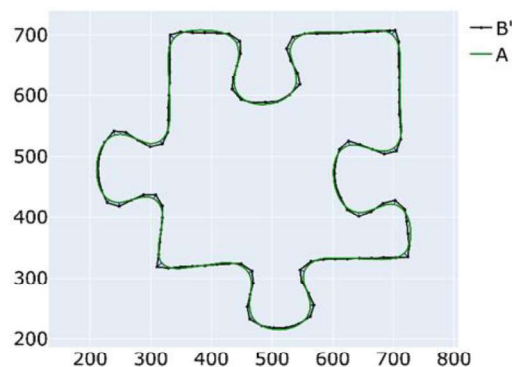


Рис. 1. Кожна 20 точка вхідного контуру (чорні точки) та початкове наближення для згладженої фігури, утворене за допомогою кожної 20-ї точки вимірювань за  $h = 20$

Введемо параметр  $h$  – це згладжування, що має розмірність довжини; чим більший цей параметр, тим сильніше згладжується контур. Після першої ітерації ми отримали графік кривизни на якому є 20 точок які є точками локального екстремуму. Це точки є кандидатами в кутові точки. Спробуємо знайти додаткові аргументи того, чи справді розглянута зона є кутовою (містить кут). Введемо поняття «роботи» як локальної міри відхилення точок згладженого контуру від вимірних точок. У механіці поняття «робота» – це добуток сили на переміщення в точці її прикладання. Тоді сила в опорі дорівнює  $D_i \Pi_i$ , а робота у точці  $R_i$  є такою:

$$R_i = D_i \Pi_i^2, \quad (1)$$

де  $\Pi_i$  – це відстань між початковими точками  $B$  та розрахунковими  $A$ , а  $D_i$  – це значення жорсткості опори

Оскільки довжина ділянки згладжування (бендвідс) геометричних особливостей для конкретного  $h$  становить приблизно  $\pm h3/4$ , то доцільно обраховувати інтегральну роботу на такій ділянці в околі особливої точки  $N$  так:

$$R_{int}(N, h) = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} D_i \Pi_i^2 = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} \frac{L_i}{h^4} \Pi_i^2 \quad (2)$$

Обчислення при значенні  $h = 20$  не дає корисної інформації так як таке значення занадто велике для цього набору точок і контур є перезгладженим. Тепер розрахуємо контур за  $h = 10$  (рис. 2), що є нашим робочим значенням згладжування [17]. Таке значення  $h$  було обрано для побудови контуру, тому що достатньою мірою згладжується шум і залишається корисна інформація.

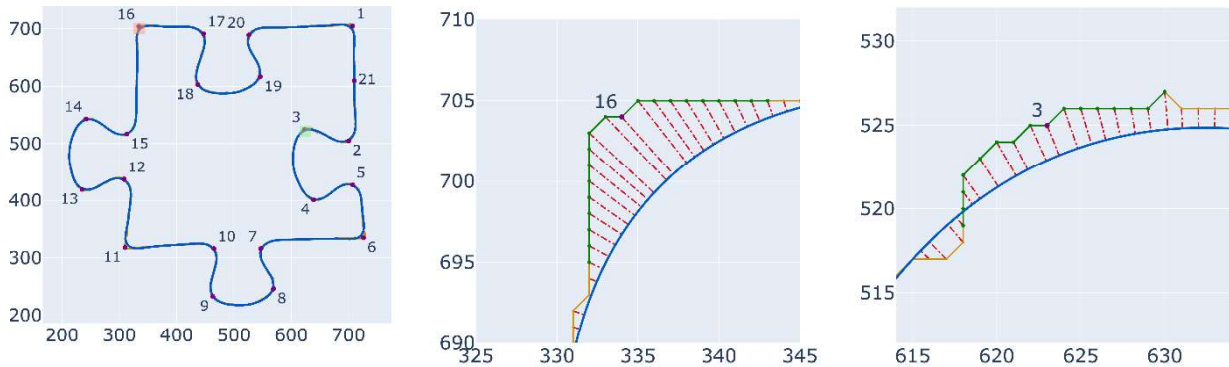


Рис. 2. Згладжений контур пазла за  $h = 10$ : а – повний контур; б – точки В й точки А в околі кутової точки 3; в – точки В та А в околі поворотної точки 20

Результати розрахунку роботи за  $h = 10$  наведено у табл. 1. Тут різниці в роботі є уже дуже помітними і демонструють доцільність застосування такого критерію порівняння для ідентифікації кутів.

Таблиця 1

Інтегральна робота в точках кандидатах при  $h = 10$  без кутових точок

$N$	1	2	3	4	5
$R_{int}$	0,002 84	0,002 60	0,020 16	0,001 54	0,002 88
$N$	6	7	8	9	10
$R_{int}$	0,002 11	0,001 68	0,016 12	0,003 08	0,001 62
$N$	11	12	13	14	15
$R_{int}$	0,002 89	0,002 39	0,016 58	0,001 46	0,002 53
$N$	16	17	18	19	20
$R_{int}$	0,002 74	0,001 82	0,014 52	0,002 24	0,004 35

### 3. Визначення кутових точок

Виберемо як характерний параметр згладжування величину  $h = 10$ , яка з одного боку є достатньою для видалення всіх артефактів вимірювання, а з другого забезпечує збереження корисної інформації. У точці кандидата додамо кутову даммі-точку (рис. 3), що дасть алгоритму можливість самостійно визначити кут, який виникає в цій точці за значення  $h = 10$ .

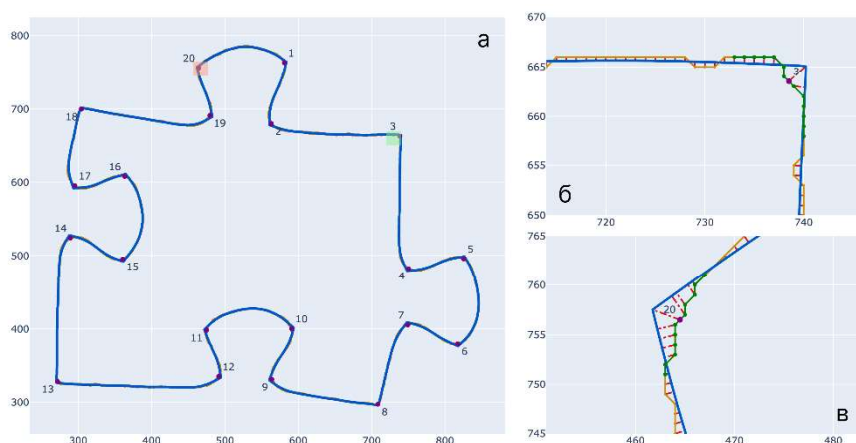


Рис. 3. Згладжений контур пазла за  $h = 10$  з додаванням кутових даммі-точок: а – повний контур; б – точки  $B$  та  $A$  в околі кутової точки 3; в – точки  $B$  та  $A$  в околі поворотної точки 20

Проаналізувавши значення з табл. 2 ми можемо визначити точки, для яких значення роботи є меншим, ніж для інших, ці точки (3, 8, 13, 18) збігаються з попереднім припущенням.

Таблиця 2

Інтегральна робота в точках кандидатах при  $h = 10$  без кутових точок

$N$	1	2	3	4	5
$R_{int}$	0,003 31	0,004 49	0,001 01	0,005 66	0,003 91
$N$	6	7	8	9	10
$R_{int}$	0,003 91	0,004 97	0,000 56	0,004 34	0,004 47
$N$	11	12	13	14	15
$R_{int}$	0,003 66	0,004 86	0,002 03	0,006 93	0,003 64
$N$	16	17	18	19	20
$R_{int}$	0,003 33	0,006 00	0,001 21	0,005 12	0,003 06

Тепер порівняємо значення роботи для точок з табл. 1 та 2. Для точок 3, 8, 13, 18 значення роботи покращилось щонайменше у 8 разів, а для всіх інших, окрім 20, погіршилось. Для точки 20 значення покращилось в 1,4 разу що є неспівмірним з іншими покращеннями. Таким чином, ми математично продемонстрували, що точки 3, 8, 13 та 18 є кутовими точками.

**Висновки.** Ця робота розширює можливості коротацийних балкових сплайнів для задач апроксимації зображень. КБС забезпечує збереження масштабу контуру та адаптивне згладжування, що залежить від похибки вимірювання, а не від густини точок.

Основним результатом є введення кутової даммі-точки, яка допускає розрив напрямку дотичної та для якої задаються нульова кривизна й неперервність поперечної сили. Це дозволяє точніше описувати контури з реальними кутами без штучного згладжування.

Запропонований метод передбачає три основні етапи. Спочатку на основі похибки вимірювання, масштабу артефактів і корисних геометричних особливостей вибирається параметр згладжування  $h$ . Далі за графіком кривизни та значенням локальної інтегральної роботи визначаються кандидати у кутові точки й уточнюється їх положення. На завершальному етапі аналізується зміна локальної роботи до і після введення кутової даммі-точки.

Показано, що для реальних кутів введення кутової даммі-точки суттєво зменшує локальну роботу (відношення від 8 до 30 разів), тоді як для ділянок гладкого повороту це відношення залишається близьким до одиниці. Отже, відношення локальних робіт до і після введення кутової даммі-точки є ефективним критерієм ідентифікації реальних кутових точок.

### *Бібліографічний список*

6. Magnier B., Hayat K. Revisiting Mehrotra and Nichani's corner detection method for improvement with truncated anisotropic Gaussian filtering. *Sensors*. 2023. Vol. 23, № 20. 8653. <https://doi.org/10.3390/s23208653>
7. Andreopoulos A., Tsotsos J. K. 50 years of object recognition: Directions forward. *Computer Vision and Image Understanding*. 2013. Vol. 117, № 8. P. 827–891. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2013.04.005>
8. Mokhtarian F., Mohanna F. Performance evaluation of corner detectors using consistency and accuracy measures. *Computer Vision and Image Understanding*. 2006. Vol. 102, № 1. P. 81–94. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2005.11.001>
9. Song W., Zhong B., Sun X. Building corner detection in aerial images with fully convolutional networks. *Sensors*. 2019. Vol. 19, № 8. 1915. <https://doi.org/10.3390/s19081915>
10. Zhang Y., Li G., Xie X., Wang Z. A new algorithm for accurate and automatic chessboard corner detection. In: 2017 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). 2017. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2017.8050637>
11. Zhang H., Xiao L., Xu G. A novel tracking method based on improved FAST corner detection and pyramid LK optical flow. In: 2020 Chinese Control and Decision

- Conference (CCDC). 2020. P. 1871–1876.  
<https://doi.org/10.1109/CCDC49329.2020.9164332>
12. Benam A., Drew M. S., Atkins M. S. A CBIR system for locating and retrieving pigment network in dermoscopy images using dermoscopy interest point detection. In: 2017 IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2017). 2017. P. 122–125. <https://doi.org/10.1109/ISBI.2017.7950483>
  13. Xia Y., Wu H., Zhu L., Qi W., Zhang S., Zhu J. A multi-sensor fusion framework with tight coupling for precise positioning and optimization. *Signal Processing*. 2024. Vol. 217. 109343. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109343>
  14. Yazdi R., Khotanlou H., Khademfar H. Robust Corner Detection Using Local Extrema Differences. *International Journal of Web Research*. 2024. Vol. 7, № 1. P. 69–84. <https://doi.org/10.22133/ijwr.2024.458246.1217>
  15. Wang J., Zhang W. A survey of corner detection methods. In: 2018 2nd International Conference on Electrical Engineering and Automation (ICEEA 2018). 2018. P. 214–219. <https://doi.org/10.2991/iceea-18.2018.47>
  16. Sun X., Zhong B. A rotation-invariant corner detector based on the median of subpixelized triangle. *Journal of King Saud University — Computer and Information Sciences*. 2023. Vol. 35, № 8. 101645. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2023.101645>
  17. Mokhtarian F., Mackworth A. K. A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1992. Vol. 14, № 8. P. 789–805. <https://doi.org/10.1109/34.149591>
  18. Eubank R. L. *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*. CRC Press, 1999. <https://doi.org/10.1201/9781482273144>
  19. Bertolazzi E., Frego M., Biral F. Point data reconstruction and smoothing using cubic splines and clusterization. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020. Vol. 176. P. 36–56. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.04.035>
  20. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. *System Research and Information Technologies*. 2022. № 4. P. 119–140. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10>
  21. Orynyak I., Kuznetsov Y., Tavrov D. Efficient construction of clothoidal splines using corotational beam splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2026. 117318. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.117318>
  22. Koltsov, D.R., Orynyak, I.V. 2025. Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротаційного балкового сплайна. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2 (Груд 2025), 5–32. DOI: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2025.2.01>.